レベルセット関数を用いた移動境界流れの数値解析

金沢大学工学部　正会員　○由比政年・石田　啓

1．はじめに

海岸工学の対象とする流体場は，本質的に移動境界を含むものが多い．近年の数値解析技術の発展により，移動境界あるいは自由表面を含む流体場の数値解析ツールとして，MAC 法，VOF 法，ALE 法，密度関数法等の手法が提案され，各分野で精力的な解析が進められている．これに関し，Sussman ら(1994)は，レベルセット関数を用いて，移動境界を捕獲し，非圧縮性の二相流体の運動を解析する手法を提案している．レベルセット法を用いると，二相流体の界面形状は，解の一部として自動的に決定されるため，気泡や水滴の分裂や融合といった過程を，特別な処理なしに解析できる利点を持つ．また，表面張力の影響を取り込むことも容易である．ここでは，このレベルセット法を用いて，水中の気泡や水面波の運動を解析し，海岸工学的検討への適用の可能性を探ってみる．

2．支配方程式

混和しない非圧縮性の二相（あるいは二層）流体の支配方程式として，無次元化された連続式および Navier-Stokes 方程式を用いる．

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{g}_u + \frac{1}{\rho}\left(-\nabla p + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla\cdot(2\mu D) + \frac{1}{B}\kappa\delta(d)\boldsymbol{n}\right) \tag{1}$$

ここで，$\boldsymbol{u}=(u,v)$を流体速度，σを表面張力，$\rho=\rho(x,t)$を流体密度，$\mu=\mu(x,t)$を流体の粘性係数，κを二相界面の曲率，$\boldsymbol{D}$を速度勾配テンソル，$\boldsymbol{g}$を重力，δを Dirac のデルタ関数，$\boldsymbol{n}$を二相界面の単位法線ベクトルとする．また，Reはレイノルズ数，Bはボンド数をそれぞれ表す．

式(1)中の密度および粘性係数の値は Particle Path に沿って保存され，その変化は次式に従う．

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\rho = 0 \ , \ \frac{\partial \mu}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\mu = 0 \tag{2}$$

3．レベルセット関数の導入

二相流体の界面において密度や粘性が急激に変化するような場合，従来の差分スキームを用いて，式(2)を解析した場合，数値的に不安定となるか，あるいは，逆に過度の数値粘性を示すことが多い．このため，式(2)を直接解くかわりに，レベルセット法を用いて境界面を捕獲(Capturing)しつつ，間接的に密度および粘性係数の時空間変化を追跡する．

以下で用いるレベルセット関数をϕで表す．ここでは，レベルセット関数として界面からの符号付き距離関数を考え，次式に従ってその時間発展を計算する．

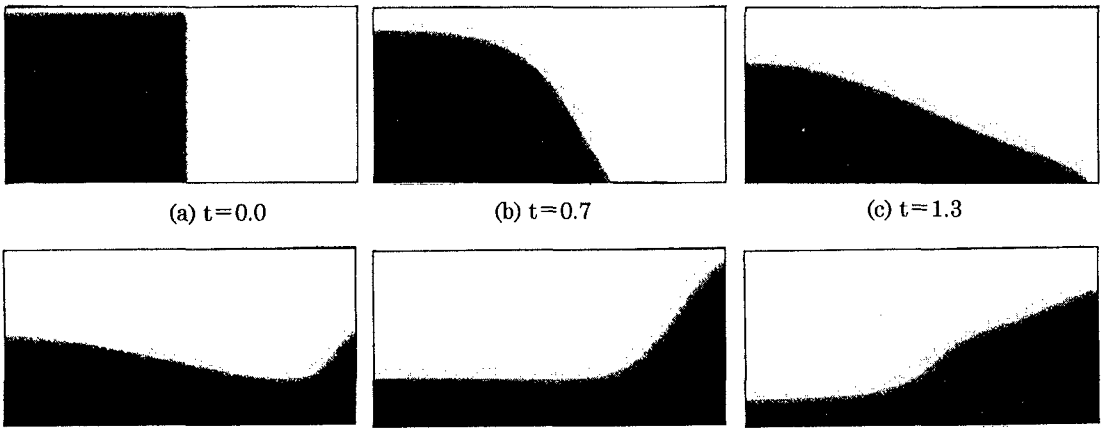
$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\phi = 0 \tag{3}$$

ここで，ϕは滑らかな連続関数であるので，上式は数値的に容易に解くことができる．なお，二相間の界面は，各時刻でのϕのゼロレベルセット（$\phi=0$のライン）として，自動的に決定される．

この時，流体の密度および粘性係数は，式(2)の代わりに次式に従って算出される．

$$\rho = \begin{cases} 1 & if\ \phi>0 \\ \rho_b/\rho_c & if\ \phi<0 \\ (\rho_b+\rho_c)/(2\rho_c) & if\ \phi=0 \end{cases} \ , \quad \mu = \begin{cases} 1 & if\ \phi>0 \\ \mu_b/\mu_c & if\ \phi<0 \\ (\mu_b+\mu_c)/(2\mu_c) & if\ \phi=0 \end{cases} \tag{4}$$

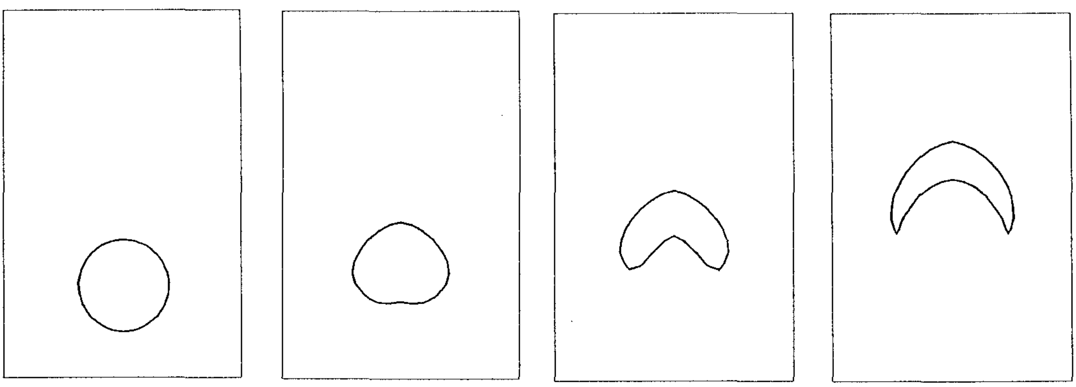
ここで，ρ_bおよびρ_cが各相の密度を，μ_bおよびμ_cが各相の粘性係数をそれぞれ表す．



(a) t＝0.0　(b) t＝0.7　(c) t＝1.3

(d) t＝1.9　(e) t＝2.9　(f) t＝4.2

図－1　水柱の崩壊問題における水面形状の時間変化



(a) t＝0.0　(b) t＝0.8　(c) t＝1.6　(d) t＝2.4

図―2　静止流体中を上昇する気泡の形状の変化

4．離散化の手法

先に示した支配方程式を差分化し，陽解法のアルゴリズムを用いて計算を行った．格子系としてはスタガード格子系を用い，速度およびレベルセット関数の時間発展に対して，2次精度のAdams-Bashforth法を用いた．空間微分項の評価においては，対流項に関しては2次精度のENOスキームを，その他の項に関しては中心差分近似をそれぞれ用いた．

5．解析例

図－1には，水柱の崩壊問題のシミュレーション結果を示す．図中の色の濃い部分が高密度側の流体（水相に相当）白い部分が低定密度側の流体（気体相に相当）である．この時の計算に用いた密度比，粘性比はともに100，レイノルズ数は100，ボンド数は無限大（表面張力なし）である．次に，図－2には，静止流体中を上昇する気泡の運動の解析結果を示す．この時の密度比は1000，粘性比は100，レイノルズ数は100，ボンド数は200（表面張力も考慮）としている．解析結果の詳細やその他の事例に関しては，発表当日，会場にて紹介を行う．

（参考文献） M.Sussman, P.Smereka, and　S.Osher, 1994, J. Comput. Phys., Vol.114, pp.146-159.