3次元ポテンシャル問題における高速多重極境界要素法の応用

福井大学大学院　学生員　○　玖津見敏広
福井大学工学部　正会員　　福井卓雄

1　はじめに

高速多重極アルゴリズム [1] は, あるグループに含まれる要素による遠方の点への影響はそのグループの近傍におかれた多重極により表現できる, という事実に基づいている。グループにたくさんの要素が含まれていて, その数が展開の項数よりもはるかに大きければ, 多重極展開を使えば計算量を $O(N)$ 程度まで省略できるという訳である。高速多重極境界要素法は境界要素法が影響関数の評価に高い計算コストを必要とするという弱点をこの高速多重極アルゴリズムの適用により補った解析法であり, これまでに 2 次元ポテンシャル問題 [2] および 2 次元静弾性問題 [3] に適用して, その高速性を確認してきた。ここでは, 3 次元ポテンシャル問題の境界要素法への高速多重極アルゴリズムの適用性について論じる。

2　3 次元ポテンシャル問題の高速多重極境界要素法

3 次元空間内で支配方程式が Laplace 方程式 $\nabla^2 u = 0$, 境界条件が部分境界∂B_1で $u = \hat{u}$,∂B_2上で $\partial u/\partial n = \hat{s}$である境界値問題を考える。このとき境界積分方程式は,

$$\frac{1}{2}\,u(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial B} G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\frac{\partial u}{\partial n_y}(\boldsymbol{y})\,dS_y - \int_{\partial B} S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,u(\boldsymbol{y})\,dS_y \tag{1}$$

である。ここで,Laplace 方程式の基本特異解 $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, 第二基本特異解 $S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ は

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}, \qquad S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{\partial G}{\partial n_y}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2}\frac{\partial|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}{\partial n_y} \tag{2}$$

である。境界を多面体で近似し, 各要素 E 上の境界値が一定であるとすると, 方程式 (1) は近似されて

$$\frac{1}{2}\,u_i = \sum_j^N A_j(\boldsymbol{x}_i)s_j - \sum_j^N B_j(\boldsymbol{x}_i)u_j \qquad i = 1,2,\cdots,N \tag{3}$$

となる。ここで, 選点$\boldsymbol{x}_i$は要素の重心点にとるものとする。影響関数 $A_i(\boldsymbol{x})$,$B_i(\boldsymbol{x})$ はそれぞれ

$$A_i(\boldsymbol{x}) = \int_{E_i} G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})dS_y, \qquad B_i(\boldsymbol{x}) = \int_{E_i} S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})dS_y \tag{4}$$

である。

式 (3) において,2N 個の境界値 $u_1, u_2, \cdots, u_N, s_1, s_2, \cdots, s_N$のうち N 個の値が境界条件により与えられる。したがって, 残りの N 個の値を方程式 (3) を解いて決定しなければならない。方程式を繰り返し法で解くことにすると, 必要な計算は行列ベクトル積$\sum_j^N A_j(\boldsymbol{x}_i)\,s_j$,$\sum_j^N B_j(\boldsymbol{x}_i)\,u_j$ の評価である。この行列ベクトル積の評価は $A_j(\boldsymbol{x})$,$B_j(\boldsymbol{x})$ というポテンシャルを持つ N 個の要素からの影響を N 個の点の上で求めることと同じであるから,N 体問題の解析に使われている高速多重極法を用いて効率良く計算することができる。

3　影響関数の多重極展開

境界要素法に, 高速多重極法を適用する場合に必要とされるものは, 問題となる場の多重極表現と影響関数の多重極展開である。3 次元ポテンシャル問題における多重極とその係数間の変換についてはよく知られている [1]。したがって, ここで必要となるのは影響関数の多重極展開である。

影響関数 $A_i(\boldsymbol{x})$ の多重極展開の計算法を示そう。$A_i(\boldsymbol{x})$ の被積分関数 $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ は Newton ポテンシャルであるから,$\boldsymbol{x} = (r,\theta,\phi)$, $\boldsymbol{y} = (\rho,\alpha,\beta)$ とすると, よく知られているように $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 1/|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$ の極座標系における表現は, 次の

多重極展開 [1]

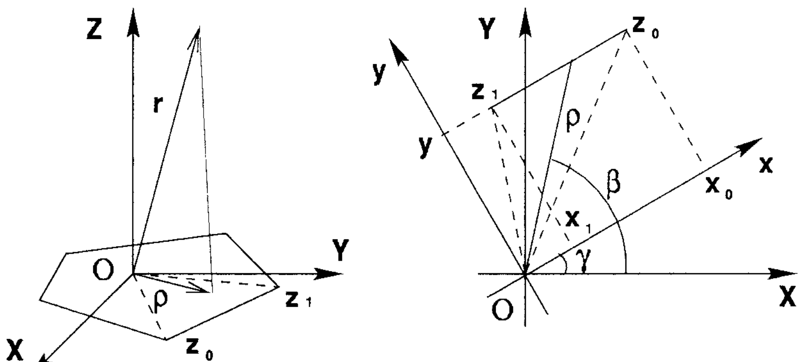
$$u(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \frac{M_n^m}{r^{n+1}} Y_n^m(\theta,\phi), \qquad M_n^m = \rho^n Y_n^{-m}(\alpha,\beta) \tag{5}$$

となる。ここに, M_n^m は多重極展開の係数であり, 球関数 $Y_n^m(\theta,\phi)$ は Legendre の陪関数を用いて,

$$Y_n^m(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{(2n+1)}{4\pi}\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}}\, P_n^{|m|}(\cos\theta)e^{im\phi} \tag{6}$$

で表される。

式 (5) を影響関数 (4) の $A_i(\boldsymbol{x})$ に代入すれば影響関数の多重極展開が得られる。多重極点を固定して考えると, 多重極係数$\tilde{M}_n^m$は式 (5) の多重極係数の要素上の積分となる。下図左のように要素の重心に Z座標が面と垂直になるように局所座標系 (X,Y,Z) をとる。このとき$\theta = \frac{\pi}{2}$ であるから Legendre の陪関数は $P_n^{|m|}(0)$ となり $n+|m|$ が奇数のときには 0 となる。さらに下右図のように x 座標が要素の各辺と並行になるように局所座標系 (x,y) をとる。要素 E 上の積分は



Plane Element　　Local Coordinate System

$$\tilde{M}_n^m = \int_E M_n^m(\rho,\alpha,\beta)\,dS_y = \int\!\!\int \rho^n Y_n^{-m}(\alpha,\beta)\rho d\rho d\beta$$

$$= \int\!\!\int B_n^{|m|}\rho^{n+1}e^{-im\beta}d\rho d\beta = \begin{cases} -B_n^{|m|}\displaystyle\sum_K \frac{y_K\, e^{-im\gamma}}{n+2}\int_{x_0}^{x_1}\rho^{n-m}(x-iy_K)^m dx & (n+|m|: even) \\ 0 & (n+|m|: odd) \end{cases} \tag{7}$$

として計算できる。ここで,$B_n^{|m|} = \sqrt{\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}}\,P_n^{|m|}(0)$ とした。$n+|m|$ が偶数のときの積分を複素数表現して, これを $I[k,m]$ とすると ($k = n+|m|/2$)

$$I[k,m] = \int_{x_0}^{x_1}\rho^{n-m}(x-iy_K)^m dx = \int_{z_0}^{z_1} z^k\bar{z}^{k+m}dz \tag{8}$$

になる。この積分は $k=0$ のときはそのまま積分すればよい。また kが 1 以上のときは, 各辺が x 軸と平行であるから $dz = d\bar{z}$ であることを利用して, 次の漸化式を使って値を計算することができる。

$$I[k+1,m-2] = \left[\frac{z^{k+1}\bar{z}^{k+m}}{k+m}\right]_{z_0}^{z_1} - \frac{k+1}{k+m}I[k,m], \qquad I[0,m] = \left[\frac{\bar{z}^{m+1}}{m+1}\right]_{z_0}^{z_1} \tag{9}$$

影響関数 $B_i(\boldsymbol{x})$ についても同様にして多重極展開を得る。これらの多重極展開を使えば, 高速多重極法を境界要素法に応用してやることが可能になる。

参考文献

[1] Greengard. L.: A short cource on fast multipole methods, *Lecture Notes, VIIth EPSRC Numerical Analysis Summer School, Leicester University, U.K., 8th-19th July,* 1996.

[2] 福井卓雄, 服部純一, 土居野優: 高速多重極法の境界要素解析への応用, 構造工学論文集, Vol. 43A, 1997.

[3] 福井卓雄, 持田哲郎: 高速多重極境界要素法の 2 次元静弾性問題への応用, 境界要素法論文集, 第 13 巻, pp. 131-136, 1996.