高速多重極境界要素法による3次元静弾性問題解析

福井大学工学部　学生員　○　福田 育広
福井大学工学部　学生員　　玖津見 敏広
福井大学工学部　正会員　　福井 卓雄

境界要素法における一つの問題点は，離散化により導かれる線形代数方程式の係数が密行列となることである。このため，従来の直接的な解法では，大規模な問題においては記憶容量・計算量ともに極めて大きくなって，解析を実行することが困難であった。著者らは，この困難を回避する方法として，高速多重極法 [1] を利用した高速多重極境界要素法 [2] を提案してきた。ここでは，この手法を3次元静弾性問題の解析に適用する。

3次元静弾性問題の境界要素法

3次元空間中の領域 B とその境界 ∂B を考える。変位 $\boldsymbol{u}$ が領域内で Navier の方程式を満足し，境界上で与えられた境界条件を満足するとする。境界値問題は次のようになる。

$$G\left[u_{i,jj}+\frac{1}{1-2\nu}u_{j,ji}\right]+X_i=0 \quad \text{in } B, \qquad u_i=\hat{u}_i \quad \text{on } \partial B_1, \qquad T_{ij}u_j=\hat{s}_i \quad \text{on } \partial B_2 \tag{1}$$

ここに，$\boldsymbol{X}$ は物体力，G はせん断弾性係数，ν は Poisson 比である。また，$T_{ij}u_j$ は境界上の応力ベクトルで，境界の単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とするとき，

$$T_{ij}u_j=G\left[\frac{\nu}{1-2\nu}n_iu_{k,k}+n_ju_{i,j}+n_ju_{j,i}\right] \tag{2}$$

で与えられる。Navier の方程式 (1) の基本特異解および第2基本特異解は次のように与えられる。

$$G_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\frac{1}{4\pi G}\left[\frac{\delta_{ij}}{r}+\frac{1}{4(1-\nu)}r_{,ij}\right], \qquad S_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=T^y_{jk}G_{ki}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \tag{3}$$

Somigliana の公式により，境界積分方程式は

$$C_{ij}(\boldsymbol{x})u_j(\boldsymbol{x})=\int_{\partial B}G_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})T_{jk}u_k(\boldsymbol{y})\,dS_y-\int_{\partial B}S_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})u_j(\boldsymbol{y})\,dS_y \tag{4}$$

となる。ここに，$\boldsymbol{C}$ は点 $\boldsymbol{x}$ の位置に依存するパラメータで，$\boldsymbol{x}$ が領域内のとき $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{1}$，領域外のとき $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0}$，滑らかな境界上にあるとき $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{1}/2$ の値をとる。境界値に適当な近似を導入して式 (4) を離散化し，与えられた境界値に対し未知の境界値を決定して，変位 $\boldsymbol{u}$ を近似的に決定する方法が境界要素法である。

式 (4) の離散化により導かれる線形代数方程式の係数は密行列である。直接にこれを解くと，問題の自由度 N に対して，係数行列の記憶容量は $O(N^2)$，方程式を解くための計算量は $O(N^2)$〜$O(N^3)$ となる。計算を高速化するために，(4) の右辺の積分を高速多重極法 [1] を使って計算し，繰り返し解法を使って線形代数方程式を解く方法が高速多重極境界要素法である。これにより，必要記憶容量および計算量を $O(N)$ の程度に縮小できることが期待できる。

3次元静弾性問題の高速多重極法

高速多重極法はポテンシャルの場を多重極展開を使って表現し，多数の要素からの影響を一つの多重極で表現することによって，多数の要素によるポテンシャル場を評価するための計算量を著しく縮小しようとする計算法である。そのアルゴリズムの詳細は文献 [1] に譲って，ここでは，3次元静弾性問題の高速多重極法を構成するために必要な，弾性場の多重極表現，多重極の移動，局所表現への変換などについて述べる。

弾性場の多重極表現についてはGalerkinベクトルを使う方法がすでに提案されている[3]。しかしながら，重調和関数の多重極展開はその取り扱いが複雑であり，高速多重極法で用いる係数の変換に必要な計算量も多くなる。一方，著者らは2次元弾性問題における高速多重極境界要素法において複素解析関数を使った多重極表現を提案し，効率の良い高速多重極法を得た[2]。そこで，3次元問題の場合にも，調和関数を使った多重極表現を導入することにする。

弾性場をNeuber-Papkovich関数 $\boldsymbol{\phi}$, χ を使って表現することにする[4]。このとき，変位は

$$u_i = \frac{1}{2G}\left[\kappa\phi_i - x_j\phi_{j,i} - \chi_{,i}\right] \tag{5}$$

で与えられる。$\boldsymbol{\phi}$, χ は調和関数であるから，それぞれの多重極展開を，$\boldsymbol{x}$ の極座標 (r,θ,ϕ) を使って

$$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} \boldsymbol{M}_n^m \frac{Y_n^m(\theta,\phi)}{r^{n+1}}, \qquad \chi(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} N_n^m \frac{Y_n^m(\theta,\phi)}{r^{n+1}} \tag{6}$$

と表現することができる[5]。ここに，Y_n^m は球面調和関数でLegendreの陪関数 P_n^m を使って次式で定義する。

$$Y_n^m(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}}P_n^{|m|}(\cos\theta)e^{im\phi} \tag{7}$$

多重極点の移動による係数の変換はポテンシャルの場合と同様に行なわれる。ただし，(5)の形が変換後も保存されるようにする必要がある。新しい多重極点から見た古い多重極の位置を $\boldsymbol{a} = (\rho,\alpha,\beta)$ とすると，新しい多重極の係数 $\tilde{\boldsymbol{M}}_j^k$, $\tilde{N}_j^k$ は

$$\tilde{\boldsymbol{M}}_j^k = \sum_{n=0}^{j}\sum_{m=-n}^{n} \Gamma_{jn}^{km}(\rho,\alpha,\beta)\boldsymbol{M}_{j-n}^{k-m}, \qquad \tilde{N}_j^k = \sum_{n=0}^{j}\sum_{m=-n}^{n} \Gamma_{jn}^{km}(\rho,\alpha,\beta)N_{j-n}^{k-m} - \boldsymbol{a}\cdot\tilde{\boldsymbol{M}}_j^k \tag{8}$$

となる。ここに，Γ_{jn}^{km} はポテンシャル問題における係数の変換に現れるものと同じものである[1]。基本特異解(3)の場は，$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{X}/8\pi(1-\nu)r$, $\chi(\boldsymbol{x}) = 0$ で表せるから，(8)を使えば，$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})$ の多重極展開の係数は

$$\boldsymbol{M}_n^m = \frac{\boldsymbol{X}}{8\pi(1-\nu)}\rho^n Y_n^{-m}(\alpha,\beta), \qquad N_n^m = \frac{-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{X}}{8\pi(1-\nu)}\rho^n Y_n^{-m}(\alpha,\beta) \tag{9}$$

となる。

同様に，局所展開を

$$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} \boldsymbol{K}_n^m r^n Y_n^m(\theta,\phi), \qquad \chi(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} L_n^m r^n Y_n^m(\theta,\phi) \tag{10}$$

で表せば，多重極から局所展開への変換，および局所展開間の変換は

$$\boldsymbol{K}_j^k = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} \Omega_{jn}^{km}(\rho,\alpha,\beta)\boldsymbol{M}_n^m, \qquad L_j^k = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} \Omega_{jn}^{km}(\rho,\alpha,\beta)N_n^m - \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{K}_j^k \tag{11}$$

$$\tilde{\boldsymbol{K}}_j^k = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} \Lambda_{jn}^{km}(\rho,\alpha,\beta)\boldsymbol{K}_n^m, \qquad \tilde{L}_j^k = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} \Lambda_{jn}^{km}(\rho,\alpha,\beta)L_n^m - \boldsymbol{a}\cdot\tilde{\boldsymbol{K}}_j^k \tag{12}$$

となる。ここに，Ω_{jn}^{km}, Λ_{jn}^{km} はポテンシャル問題における変換を表す。

基本特異解の多重極展開(9)および係数の変換関係(8)，(11)，(12)を使えば，3次元弾性場における高速多重極法が構成でき，境界積分方程式(4)を高速に解くことが可能となる。

参考文献

[1] Greengard, L.: A short cource on fast multipole methods, *Lecture Notes, VIIth EPSRC Numerical Analysis Summer School, Leicester University, U.K., 8th-19th July*, 1996.

[2] 福井卓雄，持田哲郎：高速多重極境界要素法の2次元静弾性問題への応用，境界要素法論文集，**13** pp. 131–136, 1996.

[3] Peirce, A.P. and J.A. Napier : A spectral multipole method for efficient solution of large-scale boundary element models in elastostatics, *Int. J. Numer. Meth. Eng*, **38** pp. 4009–4034, 1995.

[4] Fung, Y.C.: *Foundation of Solid Mechanics*, Prentice-Hall, 1965.

[5] Lur'e, A.I.: *Three-Dimensional Problems of the Theory of Elasticity*, John Wiley & Sons, 1964.