2次元散乱問題の高速多重極境界要素法による解析

福井大学大学院　学生員　○　勝本 順三
福井大学工学部　正会員　　　福井 卓雄

1　はじめに

境界要素法における一つの問題点は, 離散化により導かれる線形代数方程式の係数が密行列となることである。このため, 従来の直接的な解法では, 大規模な問題において解析を実行することが困難であった。著者らは, この困難を回避する方法として, 高速多重極法 [1] を利用した高速多重極境界要素法を提案してきた。ここでは, この手法を2次元 Helmholtz 方程式の境界値問題に適用し, 散乱問題の解析に応用する。

2　Helmholtz 方程式の境界要素法

2次元空間中で, 関数 u が領域 B 内で Helmholtz 方程式 $(\nabla^2 + k^2)u = 0$ (k は波数) を満足し, 境界条件として ∂B_1 上で $u = \hat{u}$, ∂B_2 上で $\partial u/\partial n = \hat{s}$ を満足する境界値問題を考える。

Helmholtz 方程式の基本特異解および第2基本特異解は次のように与えられる。

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{i}{4}\mathrm{H}_0^{(1)}(k|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|), \qquad S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{\partial G}{\partial n_y}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -\frac{ik}{4}\frac{\partial|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}{\partial n_y}\mathrm{H}_1^{(1)}(k|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|) \tag{1}$$

ここに, $\mathrm{H}_n^{(1)}$ は第1種 n-次の Hankel 関数である。領域 B を無限領域と考え, 入射波を $\tilde{u}$ として, 境界∂B による散乱問題を考える。このとき, 波動場 u は, 一般化された Green の公式により, 境界積分方程式は

$$C(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x}) = \tilde{u}(\boldsymbol{x}) + \int_{\partial B} G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\frac{\partial u}{\partial n}(\boldsymbol{y})\,dS_y - \int_{\partial B} S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})u(\boldsymbol{y})\,dS_y \tag{2}$$

で表される。ここに, C は点 $\boldsymbol{x}$ の位置に依存するパラメータで, $\boldsymbol{x}$ が領域内のとき $C=1$, 領域外のとき $C=0$, 滑らかな境界上にあるとき $C=1/2$ の値をとる。境界値に適当な近似を導入して式 (2) を離散化し, 与えられた境界値に対し未知の境界値を決定して, 関数 u を近似的に決定する方法が境界要素法である。

3　高速多重極法の適用

高速多重極法の基本的な考えは, 多数の波動源からなる波動場をそれと等価な1つの多重極による波動場に置き換えて計算効率を上げようとするものである。この考えを式 (2) の右辺の積分の評価に導入し, 積分の計算を高速化して, 適当な繰返し解法を使って方程式を解けば, 境界要素法を高速化できる。

図-1に示すように, 二点 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して, $\boldsymbol{y}$ の近くに $\boldsymbol{y}_\circ$ をとり, $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}_\circ$ および $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_\circ$ の極座標表現を, それぞれ, (r,θ), (ρ,ϕ) とする。$r > \rho$ であるとき, Graf の加法定理により, 基本特異解 (1) は,

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{i}{4}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{H}_n^{(1)}(kr)\mathrm{J}_n(k\rho)e^{in(\theta-\phi)} \tag{3}$$

となる。一般に

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{i}{4}\sum_{n=-\infty}^{\infty}M_n\mathrm{H}_n^{(1)}(kr)e^{in\theta} \tag{4}$$

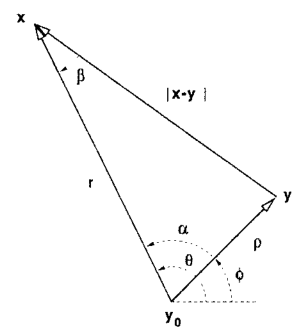


図-1　多重極点

を波動場 u の多重極展開という。M_n は多重極展開の係数で, 基本特異解 (3) の場合には $M_n = \mathrm{J}_n(k\rho)e^{-in\phi}$ となっている。第2基本特異解の係数は, 式 (1) により, M_n の法線導関数をとれば得られる。

さらに, Graf の加法定理を (4) に適用すれば, 多重極点の移動 (ρ, ϕ) による係数の変換関係は次のようになる。

$$\tilde{M}_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} M_m \mathrm{J}_{n-m}(k\rho) e^{-i(n-m)\phi} \tag{5}$$

点 $\boldsymbol{x}$ の近傍に点 $\boldsymbol{x}_0$ をとり, 波動場 $u(\boldsymbol{x})$ を点$\boldsymbol{x}_0$ のまわりの局所展開として表すと次のようになる。

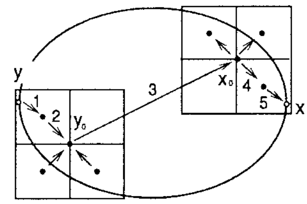
$$u(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} L_n \mathrm{J}_n(k r) e^{-in\theta} \tag{6}$$

局所展開点 $\boldsymbol{x}_0$ から見た多重極点 $\boldsymbol{y}_0$ の位置を (ρ, ϕ) として, (4) に Graf の加法定理を再度適用し, $\mathrm{J}_n(kr)e^{-in\theta}$ について整理すると, 多重極展開係数 M_n から局所展開係数 L_n への変換関係は次のようになる。

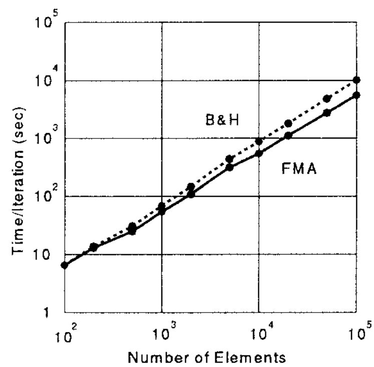
$$L_n = \frac{i}{4} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m M_m \mathrm{H}^{(1)}_{n+m}(k\rho) e^{i(n+m)\phi} \tag{7}$$

局所展開の収束半径内に新しい展開点を設け, 新しい展開点から見た古い展開点の位置を (ρ, ϕ) とする。Graf の加法定理を (7) に適用すれば, 局所展開点の移動による係数の変換関係は次のようになる。

$$\tilde{L}_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{m-n} L_m \mathrm{J}_{m-n}(k\rho) e^{-i(m-n)\phi} \tag{8}$$



図–2 高速多重極法の計算過程



図–3 一回の繰返し当たりの計算時間

ポテンシャル評価は, 高速多重極アルゴリズム [1] に基づいて行う。領域全体を含む正方形を考え, 順次 4 等分したセルを作ることにより, 境界要素の集合を 4 分木で構造化する。計算は, この木の構造の上で行われ, 一つの要素からの影響は, 図-2の過程 1〜5 を経て評価される。まず, セルに含まれる要素の効果をセルの中心点について多重極展開し, その係数を計算する (過程 1)。次に, 式 (5) で多重極点を子セルから親セルへ移動させ, それぞれの子セルからの効果を重ね合わせ計算する (過程 2)。次に, 式 (7) で遠方の多重極の係数を局所展開の係数に変換する (過程 3)。さらに, そのセルに子セルがある場合には, 式 (8) で局所展開点を移動させて係数を変換し親セルの係数を子セルの係数として引き渡す (過程 4)。最後に, 局所展開 (6) で遠方からの影響を計算する (過程 5)。この手法の記憶容量・計算量は共に $O(N)$ となる。

また, Barnes と Hut のアルゴリズム [2] があるが, これは, 局所展開を行わず, 過程 3 で多重極展開 (4) を用いて遠方からの影響を計算しているものである。この手法の記憶容量は $O(N)$, 計算量は $O(N log N)$ となる。

4 楕円散乱体の解析

楕円散乱体 (硬) の解析を要素数 100〜100,000 について行なった。波数は楕円の長径 a に対して ka=1, 使用した展開項数は 18 である。10 回程度の繰返しで収束している。

図-3に一回の繰返しあたりの計算時間を要素数に対してプロットしたものを示す。グラフの勾配から, 高速多重極アルゴリズム (FMA) では $O(N)$ 程度, Barnes と Hut のアルゴリズム (B & H) では $O(N)$ よりやや大きめであることがわかる。また, 高速多重極アルゴリズムは Barnes と Hut のアルゴリズムより高速である。

記憶容量については, 高速多重極アルゴリズムがやや大きくなるものの 2 つのアルゴリズム共に $O(N)$ となることが確認できた。

参考文献

[1] Greengard, L.: A short cource on fast multipole methods, *Lecture Notes, VIIth EPSRC Numerical Analysis Summer School, Leicester University, U.K., 8th-19th July*, 1996.

[2] Barnes, J. and P. Hut : A hierarchical $O(N \log N)$ force-calculation algorithm, *Nature*, **324(4)**, pp. 446–449, 1986.

[3] 福井卓雄, 勝本順三: 高速多重極境界要素法による 2 次元散乱問題の解析, BEM・テクノロジー・コンファレンス論文集, 第 7 巻, pp. 47–52. 1997,

[4] 福井卓雄, 勝本順三: 2 次元 Helmholtz 方程式のための高速多重極アルゴリズムと境界要素法への応用, 境界要素法論文集, 第 14 巻, pp. 81–86. 1997.