# 境界要素法による２次元動弾性問題の高速解法

福井大学工学部　学生員　○　川下 智
福井大学大学院　学生員　　井上 耕一
福井大学工学部　正会員　　福井 卓雄

## 1　はじめに

本論文では，2 次元動弾性問題の周波数領域境界要素法を定式化し，従来の解析では到底できなかった大規模な問題に対し精度を保ったまま高速に解析する手法を述べる。問題は，例えば多くの散乱体が内在した場の解析を従来の境界要素法で行う場合，離散化により導かれる線形代数方程式が密行列の係数をもち，記憶容量・計算量ともに極めて大きくなることで解析が不可能となることにあった。そこで著者らは，不可能を可能にする方法として，高速多重極法 [1] を利用した高速多重極境界要素法を 2 次元動弾性の境界値問題に適用する。

## 2　２次元動弾性問題

一定の角周波数 $\omega$ をもつ平面定常波が，等方等質な 2 次元弾性体内を伝播する問題を考える。$G$ はせん断弾性係数，$\nu$ は Poisson 比である。領域 $B$，その境界 $\partial B$ において２次元動弾性の境界値問題は Galerkin ベクトル $\boldsymbol{F}$ を導入し [2]，変位を $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ 応力を $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})$ 物体力を $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$ として，つぎのように書ける。

$$
\begin{aligned}
&2G\boldsymbol{u} = -\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{F}) + 2(1-\nu)\,\Box_L\,\boldsymbol{F}, \qquad \Box_L\,\Box_T\,\boldsymbol{F} = -\frac{\boldsymbol{X}}{1-\nu} \quad \text{in } B \\
&\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) \quad \text{on } \partial B_1, \qquad \boldsymbol{s}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) = \hat{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{x}) \quad \text{on } \partial B_2
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ここに, $\boldsymbol{n}$ は境界上の単位法線ベクトル，$\boldsymbol{s}$ は境界応力ベクトルである。また，波動オペレーター $\Box_L = \nabla^2 + {k_L}^2$, $\Box_T = \nabla^2 + {k_T}^2$ であり，$k_L$，$k_T$ は弾性体を伝わる縦波，横波の波数で位相速度を $c_L$，$c_T$ とすると $k_L = \omega/c_L$, $k_T = \omega/c_T$ で表される。ソース点 $\boldsymbol{y}$ に作用する集中力を $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{y})$，変位のくいちがい量を $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{y})$ とする。基本特異解 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})$ および第 2 基本特異解 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})$ による変位はそれぞれ $\boldsymbol{u}_G(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{u}_S(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{U}(\boldsymbol{y})$ で与えられ，対応する Galerkin ベクトル $\boldsymbol{F}_G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})$，$\boldsymbol{F}_S(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})$ は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{F}_G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}) = f\,\boldsymbol{P}, \qquad \boldsymbol{F}_S(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}) = G\,[\,\boldsymbol{n}(\nabla f\cdot\boldsymbol{U}) + (\nabla f\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{U}\,] + \lambda\,\nabla f\,(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{U}) \\
&f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}) = -\frac{2}{{k_T}^2}\left[\frac{i}{4}\mathrm{H}_0^{(1)}(k_T|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|) - \frac{i}{4}\mathrm{H}_0^{(1)}(k_L|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)\right]
\end{aligned}
\tag{2}
$$

ここに，$\lambda$ は Lamé 定数，$\mathrm{H}_0^{(1)}$ は第 1 種 0-次の Hankel 関数である。$B$ を無限領域と考え，入射波を $\tilde{\boldsymbol{u}}$ として，境界 $\partial B$ による散乱問題を考える。このとき波動場 $\boldsymbol{u}$ は，一般化された Green の公式により，

$$
\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) + \int_{\partial B}[\,\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{s}(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y})\,]\,ds_y \tag{3}
$$

となる。$\boldsymbol{C}$ は $\boldsymbol{x}$ の位置によって決まる係数であり, 境界$\partial B$ が滑らかであると仮定すると，$\boldsymbol{x}\in B$ のとき$\boldsymbol{I}$（恒等テンソル），$\boldsymbol{x}\in\partial B$ のとき $\boldsymbol{I}/2$，それ以外のとき $\boldsymbol{0}$ となる。境界値 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{s}$ に適当な近似を導入する。$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \sum_m \phi_m(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}_m$，$\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x}) = \sum_m \phi_m(\boldsymbol{x})\boldsymbol{s}_m$ により式 (3) を離散化し，与えられた境界値に対し未知の境界値を決定して，関数 $\boldsymbol{u}$ を近似的に決定する方法が境界要素法である (4)。

$$
\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \simeq \tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) + \sum_m\left(\int_{E_m}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})\,\phi_m(\boldsymbol{y})\,ds_y\cdot\boldsymbol{s}_m - \int_{E_m}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})\,\phi_m(\boldsymbol{y})\,ds_y\cdot\boldsymbol{u}_m\right) \tag{4}
$$

離散化により導かれる線形代数方程式の係数は密行列である。直接にこれを解くと，問題の自由度 $N$ に対して，係数行列の記憶容量は $O(N^2)$，方程式を解くための計算量は $O(N^2)$〜$O(N^3)$ となる。これらの計算を高速多重極法，および繰り返し解法によって大幅に縮小しようとする方法が高速多重極境界要素法である。

## 3 基本解の多重極展開

計算を高速化するために，式 (3) の右辺の積分を多重極展開を使って評価する。二点 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ に対して，$\boldsymbol{y}$ の近くに多重極点 $\boldsymbol{y}_\circ$ をとり。$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}_\circ$ および $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_\circ$ の極座標表現を，それぞれ，$(r,\theta)$, $(\rho,\phi)$ としよう。$r>\rho$ であるとき，Graf の加法定理により，基本特異解 (2) の Galerkin ベクトル $\boldsymbol{F}_G$ は，

$$\boldsymbol{F}_G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}_\circ;\boldsymbol{y})=\frac{i}{4}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\boldsymbol{M}_n^T\mathrm{H}_n^{(1)}(k_Tr)\,e^{in\theta}-\boldsymbol{M}_n^L\mathrm{H}_n^{(1)}(k_Lr)\,e^{in\theta}\right] \tag{5}$$

$$\boldsymbol{M}_n^T(\boldsymbol{y}_\circ;\boldsymbol{y})=-\boldsymbol{P}\frac{2}{k_T^2}\,\mathrm{J}_n(k_T\rho)\,e^{-in\phi},\quad \boldsymbol{M}_n^L(\boldsymbol{y}_\circ;\boldsymbol{y})=-\boldsymbol{P}\frac{2}{k_T^2}\,\mathrm{J}_n(k_L\rho)\,e^{-in\phi} \tag{6}$$

となる。(5) を $\boldsymbol{F}_G$ の多重極展開という。ここに現れる $\boldsymbol{M}_n^L$，$\boldsymbol{M}_n^T$ は多重極展開の係数（縦波，横波成分）であり，多重極点 $\boldsymbol{y}_\circ$ に依存し，点 $\boldsymbol{x}$ の移動には影響されない形になっている。

基本特異解 (2) における Galerkin ベクトルについて，本解析では $\boldsymbol{F}_G$ の場合は (5)，(6) を用いてそのまま評価しているが，$\boldsymbol{F}_S$ については極座標上 $(\rho,\phi)$ で $f$ を微分し，座標変換を行って直交座標上での値を導いている。また同様に，(1) から変位 $\boldsymbol{u}$ を評価するときには Galerkin ベクトルの二階導関数が必要となるが，$(\rho,\phi)$ 上で共変微分したものを座標変換している。

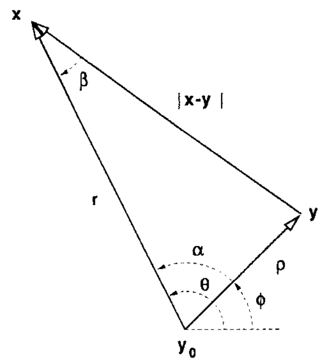


**Fig.1** Multipole expansion

さらに，Graf の加法定理を (5) に適用すれば，多重極点の移動による係数の変換関係は変換後の新しい係数を $\tilde{\boldsymbol{M}}_n$ として次のようになる。

$$\tilde{\boldsymbol{M}}_n=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\boldsymbol{M}_m\mathrm{J}_{n-m}(k\rho)\,e^{-i(n-m)\phi} \tag{7}$$

Galerkin ベクトル $\boldsymbol{F}_G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})$ を多重極点から十分に離れた点 $\boldsymbol{x}_0$ のまわりの局所展開

$$\boldsymbol{F}_G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{x}_\circ;\boldsymbol{y}_\circ;\boldsymbol{y})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\boldsymbol{L}_n^T\mathrm{J}_n(k_Tr)\,e^{-in\theta}-\boldsymbol{L}_n^L\mathrm{J}_n(k_Lr)\,e^{-in\theta}\right] \tag{8}$$

として表すことにする。局所展開点 $\boldsymbol{x}_0$ から見た多重極点 $\boldsymbol{y}_0$ の位置を $(\rho,\phi)$ として，多重極展開 (5) に Graf の加法定理を再度適用し，$\mathrm{J}_n(k_Lr)\,e^{-in\theta}$，$\mathrm{J}_n(k_Tr)\,e^{-in\theta}$ について整理すると，多重極展開係数 $\boldsymbol{M}_n$ から局所展開係数 $\boldsymbol{L}_n$ への変換関係

$$\boldsymbol{L}_n(\boldsymbol{x}_\circ;\boldsymbol{y}_\circ;\boldsymbol{y})=\frac{i}{4}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m\boldsymbol{M}_m\mathrm{H}_{n+m}^{(1)}(k\rho)\,e^{i(n+m)\phi} \tag{9}$$

が得られる。

局所展開の収束半径内に新しい展開点を設け，新しい展開点から見た古い展開点の位置を $(\rho,\phi)$ とする。Graf の加法定理を (8) に適用すれば，新しい展開係数 $\tilde{\boldsymbol{L}}_n$ と古い係数 $\boldsymbol{L}_n$ との変換関係は

$$\tilde{\boldsymbol{L}}_n=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^{m-n}\boldsymbol{L}_m\mathrm{J}_{m-n}(k\rho)\,e^{-i(m-n)\phi} \tag{10}$$

となる。変換関係 (7)，(9)，(10) については 2 次元 Helmholtz 方程式に適用されたアルゴリズム [3] と同様であり，(5)，(8) においては，縦波，横波の 2 成分が現れてくる。以上より，全体の計算が階層構造（4 分木）の上で行なわれ，高速多重極境界要素法を 2 次元動弾性問題に適用できることとなる。結局，この手法を用い境界値 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{s}$ を $O(N)$ の程度で高速に計算することが可能となる。

## 参考文献

[1] Greengard, L.: A short cource on fast multipole methods, *Lecture Notes, VIIth EPSRC Numerical Analysis Summer School, Leicester University, U.K., 8th-19th July*, 1996.

[2] Fung, Y.C.: *Foundation of Solid Mechanics*, (1965), Prentice-Hall.

[3] 福井卓雄, 勝本順三: 2 次元 Helmholtz 方程式のための高速多重極アルゴリズムと境界要素法への応用, 境界要素法論文集, 第 14 巻, 1997, pp. 81–86