

平面応力問題へのスプライン要素法の適用について

大同工業大学工学部

○田中宏明

大同工業大学工学部

岩月満輝

大同工業大学工学部 正会員

水澤富作

1. はじめに 2次元弾性問題の一つである平面応力問題は、古くから解析的、数値的に検討されてきている。しかしながら、解析的に解の得られる問題は限られているので、有限要素法、差分法や境界要素法などの数値解析法により解かれる。面内に作用する分布荷重や集中荷重を受ける長方形シャイベの応力問題では、固定端の隅角部や集中荷重の載荷点近傍に大きな応力勾配を持つ特異点があるので、解の収束性や精度が解析上重要な問題になっている。

本文では、2次元弾性理論に基づくスプライン要素法を用いて、図-1に示すような任意の境界条件を持つ長方形シャイベの応力解析を行い、本手法の収束性や解析精度について検討を行なっている。また、応力分布性状に与えるアスペクト比、境界条件や荷重条件などの影響について示す。

2. 解析手法 ここでは、2次元弾性理論とポテンシャルエネルギー最小化原理に基づく Spline 要素モデルを導く。このスプライン要素法は、2方向の変位に B-spline 関数を仮定している。式の定式化にあたり、次式で表される無次元の直交座標系を用いる。 $\xi = x/a$, $\eta = y/b$ (1)

ここで、 a , b は、それぞれ長方形シャイベの長さ高さである。

長方形要素で仮定される ξ , η 方向の変位関数 U , V は、それぞれ次式で表される。

$$U = \sum_{m=1}^{ix} \sum_{n=1}^{iy} A_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) = [N]_{mn} \{\delta_A\}_{mn}, V = \sum_{m=1}^{ix} \sum_{n=1}^{iy} B_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) = [N]_{mn} \{\delta_B\}_{mn} \quad \dots \dots (2)$$

ここで、 $ix = k-1 + Mx$, $iy = k-1 + My$, $N_{m,k}(\xi)$ と $N_{n,k}(\eta)$ は正規化された B-spline 関数であり、 $k-1$ は B-spline 関数のスプライン次数、 Mx と My はそれぞれ x と y 方向の Spline 要素の分割数である。

また、直交異方向の長方形シャイベの構成式は、次式で与えられる。 $\nu, \eta = y/b, \nu$

$$\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\} = \sum_{m=1}^{ix} \sum_{n=1}^{iy} [D][B]_{mn} \{\Delta\}_{mn} \quad \dots \dots (3)$$

ここで、 $\{\sigma\} = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\}^T$, $\{\epsilon\} = \{\epsilon_x \epsilon_y \tau_{xy}\}^T$, $[B]_{mn}$ はひずみマトリクス、 $\{\Delta\} = \{\{\delta_A\}_{mn}, \{\delta_B\}_{mn}\}^T$ であり、また弾性マトリクスは、次式で示される。

$$[D] = \begin{bmatrix} D_x & D_1 & 0 \\ D_1 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix} \dots \dots (4) \text{ ただし、} D_x = E_x/(1-\nu_x \nu_y), D_y =$$

$E_y/(1-\nu_x \nu_y)$, $D_1 = \nu_x D_y = \nu_y D_x$, $D_{xy} = G_{xy}$ であり、 E_x, E_y はヤング係数、 ν_x , ν_y はポアソン比、 G_{xy} はせん断弾性係数である。

したがって、等厚な長方形シャイベのひずみエネルギー、 U_p は次式で与えられる。

$$U_p = (1/2) \sum_{m=1}^{ix} \sum_{n=1}^{iy} \sum_{r=1}^{ix} \sum_{s=1}^{iy} \{\Delta\}_{mn}^T (abt) \int_0^1 \int_0^1 [B]_{mn}^T [D] [B]_{rs} d\xi d\eta \{\Delta\}_{rs} \quad \dots \dots (5)$$

また、図-1に示すように、 y -方向に作用する集中荷重、 P_y と等分布荷重、 q_y による外力ポテンシャル V は次式で与えられる。

$$V = \sum_{m=1}^{ix} \sum_{n=1}^{iy} B_{mn} \left\{ P_y N_{m,k}(\xi) \Big|_{\xi=\xi_0} \cdot N_{n,k}(\eta) \Big|_{\eta=\eta_0} + q_y a \int_0^1 N_{m,k}(\xi) d\xi \cdot N_{n,k}(\eta) \Big|_{\eta=\eta_0} \right\} \quad \dots \dots (6)$$

したがって、全ポテンシャルエネルギー Π は、 $\Pi = U_p - V$ (7)

で与えられるので、ポテンシャルエネルギー最小の原理を用いると、次式の基礎方程式が得られる。

$$\partial \Pi / \partial \{\Delta\}_{rs} = \sum_{m=1}^{ix} \sum_{n=1}^{iy} ([K]_{mn} \{\Delta\}_{mn} - \{F\}_{mn}) = 0 \quad \dots \dots (8)$$

ここで、 $\{F\}_{mn}$ は外力ベクトルであり、また式(5)から求められる $[K]_{mn}$ の大きさは、 $2(k-1+Mx) \times (k-1+My)$ になる。 $k-1$ はスプライン次数であり、 Mx と My は、それぞれ x -方向と y -方向の要素の分割数である。

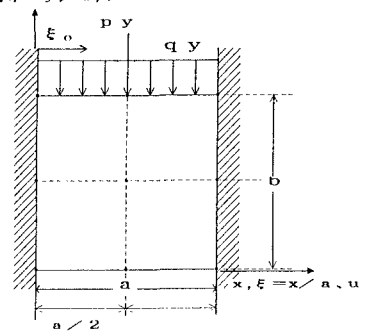


図-1 長方形シャイベと座標系

3. 数値計算例及び考察 ここでは、 y 軸に平行な2つの境界辺が固定された等方性長方形シャイベの応力解析へのスプライン要素法の適用について示す。

図-2は、上縁で y 方向に一樣な分布荷重 q_y を受ける正方形シャイベの上縁中央($x=a/2, y=a$)での鉛直変位、 V と応力 σ_y の収束に与える要素分割とスプライン次数の影響を示している。また表-1には、汎用プログラム COSMOS/M (8節点アイソパラメトリックス要素) で解かれた結果²⁾との精度比較が示してある。これより、高次要素モデルを用いれば、少ない分割数で安定した収束値が得られており、またかなり少ない未知数で、有限要素法による解と一致した結果が得られている。

次に、図-3には、上縁で等分布荷重を受ける長方形シャイベの中央断面($x=a/2$)に沿った鉛直応力 σ_x と σ_y の分布性状に与える辺長比(a/b)の影響が示してある。ここで、辺長比は0.5から5.0まで変化させている。これより、辺長比が小さくなると、せん断変形の影響や表面荷重の影響により応力の分布が非線形で非対称な性状が示される。また、固定端($x=0$)での高さ方向の応力分布 σ_y と τ_{xy} に与える辺長比の影響が図-4に示してある。固定端での応力分布は、辺長比に関係なく非線形な性状を示し、また辺長比が小さくなると、載荷面近傍に応力集中がみられる。

表-1 等分布荷重を受ける正方形シャイベの解の収束性に与える要素分割数とスプライン次数の影響 ($\nu=0.3$ $a/b=1.0$)

k - 1	M _x =M _y	DOF*	V	σ_x	σ_y
($\xi=0.5, \eta=1.0$)					
2	4	72	0.75969	0.90228	0.99466
	8	200	0.76541	0.89004	1.0082
	16	648	0.76697	0.87690	1.0041
	24	1352	0.76730	0.87537	1.0019
	32	2312	0.76743	0.87495	1.0010
3	4	98	0.76510	0.87495	1.0840
	8	242	0.76686	0.88165	1.0219
	16	722	0.76739	0.87577	1.0015
	24	1458	0.76750	0.87410	1.0000
4	4	128	0.76510	0.87985	1.0840
	8	288	0.76708	0.87023	1.0299
	16	800	0.76748	0.87265	1.0017
	24	1568	0.76750	0.87410	1.0000
SDTFM(8 strips) ²⁾			0.7672	0.8740	1.0001
FEM(16 x 16)		1543	0.7666	0.8708	1.0020
FEM(50x50)		15000	0.7675	0.8740	1.0000
Multiplier		$\nu \times (q_a/Et) \times (1 - \nu^2)$		(q / t)	

DOF* = $2(k-1+M_x)(k-1+M_y)$

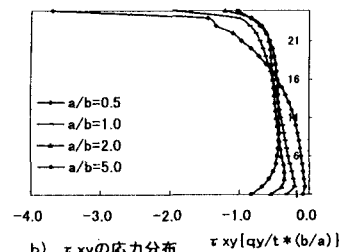
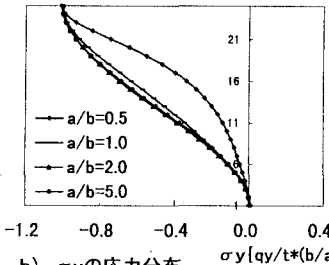
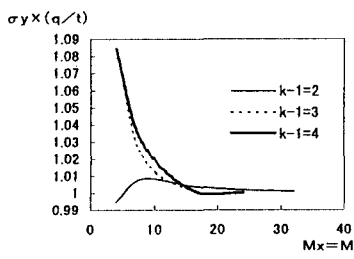
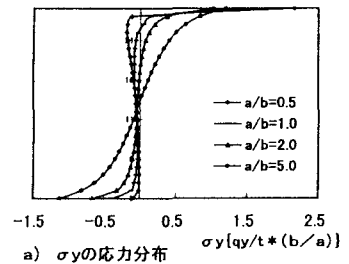
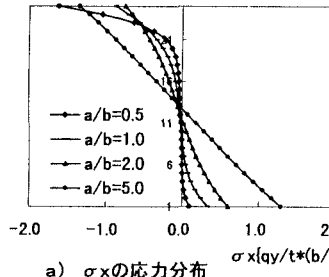
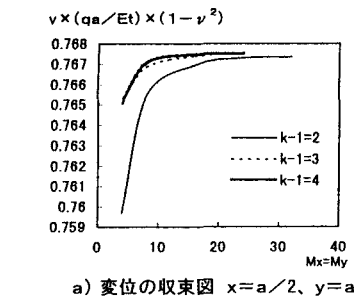


図-2 変位と応力の収束図 ($a/b=1.0$ $\nu=0.3$) 図-3 長方形シャイベ中央断面($x=a/2$)での応力分布に与える辺長比の影響 図-4 長方形シャイベの固定端($x=0$)での応力分布に与える辺長比の影響

4. あとがき 本文で得られた主な結果を示すと、以下のようになる。(1) 高次要素モデルを用いれば、少ない分割数で安定した収束値が得られており、またかなり少ない未知数で、有限要素法による解と良く一致した結果が得られている。(2) 長方形シャイベの応力分布に与える辺長比の影響が顕著に見られ、辺長比が小さくなると、せん断変形の影響と表面荷重の影響により、非線形で非対称な分布性状が示される。また、固定端部の載荷面近傍には、応力集中が見られる。(3) 本手法は、特異点を持つ平面応力問題に対しても有効に適用できる。

参考文献

1. Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N: Theory of elasticity. MaGraw-Hill, 1970.
2. Yang, B. and Zhou, J.: Semi-analytical solution of 2-D elasticity problems by the strip distributed transfer function method IJSS, Vol.33, pp.3983-4005, 1996