

## 半無限平面上の円形剛体パンチ問題のグリーン関数

名古屋工業大学 学員 ○白井 幸雄  
名古屋工業大学 正員 長谷部 宣男

1. はじめに

パンチ接触問題は、数理弾性問題における古典的な問題の一つである。本論文では、内部に集中荷重を有しパンチ両端が滑らかに接触する円形剛体パンチの問題の解析を行なう。接触部にはクーロンの摩擦力が働くものとしている。このような摩擦を有するパンチ問題は、パンチ接触部以外では外力が0の境界条件が、パンチ接触部では摩擦則と垂直変位が与えられる混合境界値問題となり、Riemann-Hilbert 問題に帰着することができる。応力関数は2つに分けることができる。1つは半平面の内部に集中荷重を有するもので、これを用いて重ね合わせの原理より、全体として Riemann-Hilbert 問題を満足するグリーン関数を求めている。

2. 解析方法

解析には半平面領域を単位円内部に写像する写像関数を用いて  $\zeta$ -plane の単位円内で正則な応力関数  $\phi(\zeta)$ 、 $\psi(\zeta)$  の一般解を求める。ここでは、次式の写像関数を用いる。

$$z = \omega(\zeta) = -i \frac{R(1+\zeta)}{10^{11} (1-\zeta)} \equiv \frac{E_o}{1-\zeta} + E_c \quad (1)$$

ここで、 $E_o = -2iR/10^{11}$ 、 $E_c = iR/10^{11}$ であり、 $R$ はパンチの半径である。また、 $R$ と比較してパンチ接触領域は非常に小さな値となるので、 $10^{11}$ という値を用いている。図1より、境界条件は次のようになる。

$$\text{外力境界 } L \text{ で} \quad P_x = P_y = 0 \quad (2a)$$

$$\text{接触領域 } M \text{ で} \quad P_x = \mu P_y, \quad \int P_y ds = P \quad (2b)$$

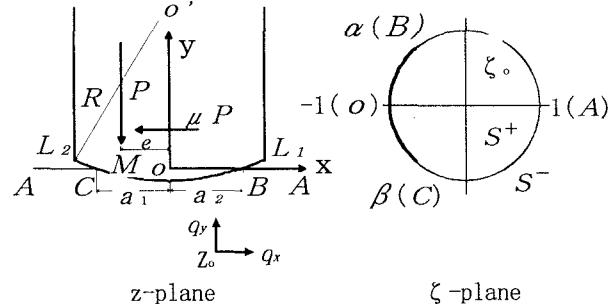


図1 領域の対応と記号

$$\nu = x^2/2R \quad (2b)$$

この境界条件を外力の境界条件式、摩擦則と垂直変位を受けるパンチ接触部の一般的な境界条件式に代入して得られる方程式は Riemann-Hilbert 問題として解かれ、最終的に  $\phi(\zeta)$  を次の形で得る [1]。

$$\phi(\zeta) = \phi_1(\zeta) + \phi_2(\zeta) \quad (3a)$$

$$\phi_2(\zeta) = H_1(\zeta) + H_2(\zeta) + H_3(\zeta) \quad (3b)$$

$$H_1(\zeta) = P(1-i\mu) \frac{\chi(\zeta)}{2\pi i} \int_{\beta}^1 \frac{d\sigma}{\chi(\sigma)(\sigma-\zeta)} \quad (3c)$$

$$H_2(\zeta) = \frac{Gi(1-i\mu)}{R(\kappa+1)} \left[ \{\omega(\zeta)\}^2 - \frac{\chi(\zeta)E_o^2}{\chi(1)(1-\zeta)} \left\{ \left( \frac{m}{1-\alpha} + \frac{1-m}{1-\beta} \right) - \frac{\chi(\zeta)E_o^2}{\chi(1)(1-\zeta)^2} - \frac{\chi(\zeta)2E_oE_c}{\chi(1)(1-\zeta)} \right\} \right] \quad (3d)$$

$$H_3(\zeta) = \frac{1-i\mu}{4\pi} [(\bar{q} - \kappa q)F_1(\zeta) + (\kappa\bar{q} - q)F_2(\zeta) + qG_1(\zeta) + \bar{q}G_2(\zeta)] \quad (3e)$$

$$F_1(\zeta) = \ln(\zeta - 1/\zeta_o) - \ln(\zeta - 1) + \chi(\zeta) \int_{1/\zeta_o}^1 \frac{d\sigma}{\chi(\sigma)(\sigma-\zeta)} \quad (3f) \quad F_2(\zeta) = \ln(\zeta - \zeta_o) - \ln(\zeta - 1) + \chi(\zeta) \int_{\zeta_o}^1 \frac{d\sigma}{\chi(\sigma)(\sigma-\zeta)} \quad (3g)$$

$$G_1(\zeta) = \frac{\overline{\omega(\zeta_o)} - \overline{\omega(1/\zeta_o)}}{\omega'(\zeta_o)} \left[ 1 - \frac{\chi(\zeta)}{\chi(\zeta_o)} \right] \frac{1}{\zeta - \zeta_o} \quad (3h) \quad G_2(\zeta) = \frac{\omega(\zeta_o) - \omega(1/\zeta_o)}{\omega'(\zeta_o)} \left[ 1 - \frac{\chi(\zeta)}{\chi(1/\zeta_o)} \right] \frac{1/\zeta_o^2}{\zeta - 1/\zeta_o} \quad (3i)$$

ここで、 $\phi_1(\zeta)$  は半無限平面内の集中荷重による応力関数で、次式で与えられる [2]。

$$\phi_1(\zeta) = \frac{q}{2\pi} \ln(\zeta - \zeta_o) - \frac{q}{2\pi} \ln(\zeta - 1) + \frac{\kappa q}{2\pi} \ln(\zeta - 1/\zeta_o) - \frac{\kappa q}{2\pi} \ln(\zeta - 1) - \frac{\bar{q}}{2\pi} \frac{\omega(\zeta_o) - \overline{\omega(\zeta_o)}}{\omega'(\zeta_o)} \frac{1/\zeta_o^2}{\zeta - 1/\zeta_o} \quad (3j)$$

$q = -(q_x + iq_y)/(1+\kappa)$  で  $q_x, q_y$  は  $x, y$  軸方向の集中荷重を表す。また、 $\psi(\zeta)$  は解析接続の原理より次のようにになる。

$$\psi(\zeta) = -\overline{\phi(1/\bar{\zeta})} - \frac{\overline{\omega(1/\bar{\zeta})}}{\omega'(\zeta)} \phi'(\zeta) \quad (4)$$

次に、パンチの両端が滑らかに接触する条件より次の 2 つの境界条件式が得られる。

$$\text{点 } B : \omega(\alpha)(\sigma_r + i\tau_{r\theta}) = \{\psi^+(\alpha) - \psi^-(\alpha)\} = 0 \quad (5a) \quad \text{点 } C : \omega(\beta)(\sigma_r + i\tau_{r\theta}) = \{\psi^+(\beta) - \psi^-(\beta)\} = 0 \quad (5b)$$

この 2 つの方程式を解くことによって接触端  $B, C$  の位置が求まる。また、パンチ押し込みにより発生する境界上の応力の分布は  $q_x, q_y$  の存在により偏心しているため、パンチには次式で表される接触面の原点まわりの合モーメント  $M_R$  が存在する。

$$M_R = Re \left[ \int_a^R \bar{\phi}(1/\sigma) \omega'(\sigma) d\sigma - \int_a^R \bar{\omega}(1/\sigma) \phi'(\sigma) d\sigma \right] \quad (6)$$

パンチが傾かないためにはパンチに作用する垂直荷重  $P$  は、 $M_R$  が偏心モーメント  $Pe$  に等しくなる位置  $e$  に作用しなくてはならない。また、垂直荷重  $P$  が原点に作用する場合は、パンチは傾く。(傾きを求めるには文献 [3] を参照)

### 3. 結果及び、考察

解析結果の一例として内部に集中荷重のない場合、及び内部の (0. - 1) に集中荷重  $q_x = 1$  の作用する場合の境界上の応力分布を示す。図にある記号は、 $\sigma_y, \sigma_x$  においては引張りが正、圧縮が負を表す。荷重は  $P = 1.0$  で一定とし、座標原点はパンチの中心、つまりパンチの底にもってきている。図 2 には  $\sigma_y$  の分布、図 3 には  $\sigma_x$  の分布を示している。図 2 より摩擦係数  $\mu$  の増加に伴い水平抵抗力が強まるため応力分布が右寄りになってくることがわかる。また、集中荷重によりパンチ接触部が右側に寄り、荷重の偏心も右に移動する。これは  $q_x = 1$  により母材が右上、左下に変形しているためであると言える。そして、図 3 より  $\sigma_x$  を見ると、パンチ接触部の右端において引張の応力集中が生じており、摩擦係数  $\mu$  の増加に伴いその値が増えていることがわかる。この点においてクラックが発生しやすくなっていると言える。

### 4. まとめ

内部に集中荷重を有す場合の円形剛体パンチのグリーン関数を誘導した。そして、応力分布、パンチ接触部の位置、長さ、合モーメントと集中荷重との関係を求めることができる。内部に dislocation が存在する場合のグリーン関数も係数の違いのみで同様にして誘導される。これらの解を応用することによって内部に孔、クラックが存在する場合の解析も行うことができる。

### [参考文献]

- [1] Jun QIAN and Norio HASEBE : Structural Eng., JSCE, Vol. 14, No. 2, 149 - 159, 1997
- [2] Norio Hasebe, Jun Qian and Yizhou Chen : Engineering Analysis with Boundary Elements 17, 263 - 267, 1996
- [3] Okamura, M., Hasebe, N. and Nakamura, T. : J. Eng. Mech., ASEC., Vol. 119, 2173 - 2185, 1990

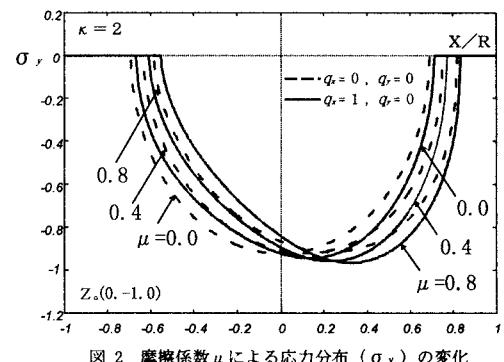


図 2 摩擦係数  $\mu$  による応力分布 ( $\sigma_y$ ) の変化

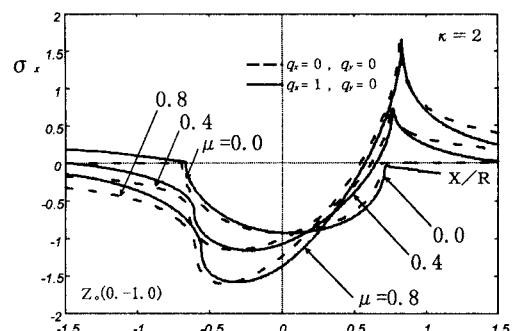


図 3 摩擦係数  $\mu$  による応力分布 ( $\sigma_x$ ) の変化