# 2 次元 Navier-Stokes 方程式の高速多重極境界要素解析

福井大学大学院　学生員　○　土居野 優
福井大学工学部　正会員　　福井 卓雄

## 1 はじめに

Navier - Stokes 方程式の近似的解析手法として, 差分法や有限要素法による解法がよく利用されている。一方, 境界要素法においても高速多重極アルゴリズムの適用により, 計算量・必要記憶容量が激減し, 大規模数値解析も可能となった。そこで, 今回は, Navier - Stokes 方程式によって支配される非圧縮性流体を高速多重極境界要素法により解析する。

## 2 境界積分方程式

流体の非圧縮性を仮定すると流れは流れ関数 $\psi$ を用いて $\boldsymbol{v} = \nabla \times \psi \boldsymbol{k}$ で与えられる。ここで, $\boldsymbol{k}$ は $x_3$ 軸方向の単位ベクトルである。流れの支配方程式は,

$$\nabla^2 \psi = -\omega, \qquad \nabla^2 \omega = Re\, v_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \tag{1}$$

で与えられる [1]。ここで, $\omega$ は渦度, $Re$ は Reynolds 数である。また, 境界条件は,

$$\begin{aligned}
&\psi(\boldsymbol{x}, t_0) = \psi_0(\boldsymbol{x}) && inB, \quad t = t_0 \\
&\psi(\boldsymbol{x}, t) = \hat{\psi}(\boldsymbol{x}, t) && on\partial B1,\ t_0 < t < \infty \\
&\frac{\partial \psi}{\partial n}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial n}(\boldsymbol{x}, t) && on\partial B2,\ t_0 < t < \infty
\end{aligned} \tag{2}$$

である。ここで扱う問題は, 支配方程式 (1) に境界条件 (2) が加わった問題である。いま, 時間増分 $\Delta t$ を導入し, $t_k = t_{k-1} + \Delta_k (k = 1, 2, 3, \cdots)$ とすると, Green の公式により (1) は領域 $B$ の内部において,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\psi^k(\boldsymbol{x}) &= \int_{\partial B} \left[ G(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) \frac{\partial \psi^k}{\partial n} - S(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) \psi^k \right] dV - \int_B G(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) \omega^k dV \\
\frac{1}{2}\omega^k(\boldsymbol{x}) &= \int_{\partial B} \left[ G(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) \frac{\partial \omega^k}{\partial n} - S(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) \omega^k \right] dV + Re \int_B G(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) v_j^{k-1} \frac{\partial \omega^{k-1}}{\partial x_j} dV
\end{aligned} \tag{3}$$

となる。ここで, $G(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y})$ および $S(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y})$ は, それぞれ基本特異解および第二基本特異解である。

境界積分方程式 (3) を数値的に解くために, 境界上の関数を次のように近似する。(3) は離散化されて,

$$\frac{1}{2}\psi^k(\boldsymbol{x}) = \sum_i^N A_i(\boldsymbol{x}) \left. \frac{\partial \psi^k}{\partial n} \right|_i - \sum_i^N B_i(\boldsymbol{x}) \psi_i^k - \sum_i^M C_i(\boldsymbol{x}) \omega^k$$

$$\frac{1}{2}\omega^k(\boldsymbol{x}) = \sum_i^N A_i(\boldsymbol{x}) \left. \frac{\partial \omega^k}{\partial n} \right|_i - \sum_i^N B_i(\boldsymbol{x}) \omega_i^k + Re \sum_i^M C_i(\boldsymbol{x}) v_j^{k-1} \left. \frac{\partial \omega^{k-1}}{\partial x} \right|_i$$

と書ける。ここで, 影響関数 $A_i(\boldsymbol{x})$, $B_i(\boldsymbol{x})$, $C_i(\boldsymbol{x})$ は,

$$A_i(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial B} G(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) \phi_i(\boldsymbol{y}) dV, \quad B_i(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial B} S(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) \phi_i(\boldsymbol{y}) dV, \quad C_i(\boldsymbol{x}) = \int_B G(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) \eta_i(\boldsymbol{y}) dV$$

で定義される。$\phi_i$, $\eta_i$ は それぞれ $i$ 番目の境界要素節点, 領域要素における線形近似の基底である。

## 3 高速多重極法

通常の境界要素法解析においては, 計算過程の進行にともない, 密行列を解くことによる計算量と必要記憶容量の爆発的増大という問題点を抱えることにより, 大規模な数値解析が困難である。しかし, 高速多重極法を応用することにより, この欠点が回避され, 巨大な問題も解析可能であることが確認されている [2]。高速多重極法について, 以下に概説する。

領域要素について, 点 $\boldsymbol{y}$ に源点があるときの点 $\boldsymbol{x}$ における対数ポテンシャルの値 $U(\boldsymbol{x})$ を評価することを考える。源点 $\boldsymbol{y}$ の近傍に点 $\boldsymbol{y}_0$ をとるとき (**Fig.1**), $z = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}_0|$ が $z_0 = |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0|$ よりも十分に大きければ, 点 $\boldsymbol{x}$ における対数ポテンシャルの値は点 $\boldsymbol{y}_0$ に関する展開形で次のように表現することができる (**Fig.2**-(1))。

$$U(\boldsymbol{x}) = \mathrm{Re}\left[M_0 \log\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{M_n}{z^n}\right], \qquad M_0 = Area, \quad M_n = \int_E \frac{z_0^n}{n} dA$$

境界要素については文献 [2] と同様に,

$$U(\boldsymbol{x}) = \mathrm{Re}\left[-M_0 \log z + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{M_n}{z^n}\right], \qquad M_0 = 1, \quad M_n = \frac{z_0^n}{n}$$

となる (**Fig.2**-(1))。これらのようなポテンシャルの展開表現を多重極展開と呼ぶ。

いくつかの多重極を集めて一つの多重極としてまとめられる。多重極点 $\boldsymbol{y}_0$ を多重極点 $\tilde{\boldsymbol{y}}_0$ に移動するとき, 新しい係数 $\tilde{M}_n$ は古い係数 $M_n$ から

$$\tilde{M}_0 = M_0, \quad \tilde{M}_n = \frac{z_0^n}{n}M_0 + \sum_{m=1}^{n}\begin{pmatrix} n-1 \\ m-1 \end{pmatrix} z_0^{n-m} M_m$$

に変換される (**Fig.2**-(2))。ここに, $z_0 \equiv \boldsymbol{y}_0 - \tilde{\boldsymbol{y}}_0$ ($\equiv$ は右辺の複素数表現) である。

多重極展開により表現されるポテンシャルの場は, 変動の少ない滑らかな場であるので, Taylor 展開

$$U(\boldsymbol{x}) = Re\left[\sum_{n=0}^{\infty} L_n z^n\right] \tag{4}$$

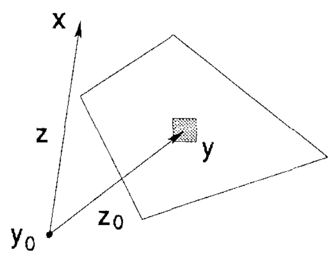


**Fig.**1 体分布要素

で表現できる。ここで, 展開の中心点 $\boldsymbol{x}_0$ に対して, $z \equiv \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$ である。また, 展開係数 $L_n$ は多重極係数 $M_n$ から

$$L_0 = -M_0 \log z_0 + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{M_m}{z_0^m}, \qquad L_n = \frac{(-1)^n}{z_0^n}\left[\frac{M_0}{n} + \sum_{m=1}^{\infty}\begin{pmatrix} n+m-1 \\ m-1 \end{pmatrix}\frac{M_m}{z_0^m}\right]$$

により得られる (**Fig.2**-(3))。ここに, 多重極点 $\boldsymbol{y}_0$ に対し, $z_0 \equiv \boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{y}_0$ である。Taylor 展開の中心点を $\boldsymbol{x}_0$ から $\tilde{\boldsymbol{x}}_0$ へ移動させる場合の新しい係数 $L_n$ は (4) に二項定理を用いて,

$$\tilde{L}_n = \sum_{m=n}^{\infty}\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} z_0^{m-n} L_m$$

により新しい展開点に関する係数を計算できる (**Fig.2**-(4))。ここに, $z_0 \equiv \tilde{\boldsymbol{x}}_0 - \boldsymbol{x}_0$ である。ポテンシャルの勾配は (4) を微分することにより, 以下のように求められる。

$$\frac{\partial U}{\partial x} - i\frac{\partial U}{\partial y} = \sum_{n=1}^{\infty} n L_n z^{n-1}$$

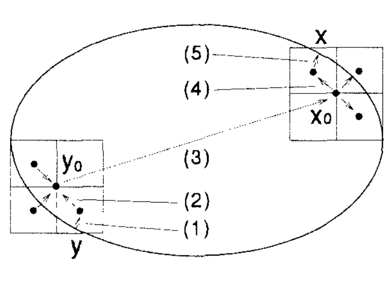


**Fig.**2 多重極展開によるポテンシャル値評価の過程

## 4 数値解析

数値解析例として, Cavity flow 問題を挙げる。詳細な解析結果は当日に報告する。

## 参考文献

[1] Kazuei Onishi : Boundary Element Analysis of Thermal Fluid Flow Using $\psi$, $\omega$, *Innovative Numerical Methods in Engineering*, (1986) pp. 269–274.

[2] 福井卓雄, 服部純一, 土居野優 : 高速多重極法の境界要素解析への応用, 構造工学論文集, **43A** (1997) pp.373-382.