

複素波数を導入した波動問題の境界要素法解析

福井大学大学院 学生員 ○ 井上耕一
福井大学工学部 正会員 福井卓雄

1 はじめに

粘弾性体の波動問題, Biot の固体-流体二相混相モデルを伝播する波動問題など, 波数が複素数となる波動問題について検討する。縦, 横, 2つの波が存在する粘弾性体の面内波動問題を時間領域で解析する手法を述べ, さらに個体の波が2つ流体の圧力波1つ, 計3つの波が伝播する Biot 物体中の波動問題の周波数領域での解析を紹介する。

2 粘弾性面内波動問題の時間領域境界要素法

媒質は等方等質の線形粘弾性体であるとする。 ρ は媒質の質量密度, $K(t), G(t)$ は体積変形およびせん断に対する緩和関数である。緩和関数は不遡及の公理 $K(t), G(t) = 0, -\infty < t < 0$ を満足するものとする。線形粘弾性面内波動問題の2次元領域 B における基礎方程式は, 変位を $\mathbf{u}$ として, つぎのように書ける。

$$G * d(\nabla^2 \mathbf{u}) + \left(K + \frac{G}{3} \right) * d(\nabla \nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{X} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad \text{in } B, 0 < t < \infty \quad (1)$$

境界積分方程式 波動方程式 (1) に対し, 一般化された Love の公式から次のような解が境界上で与えられる。

$$C(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + \int_{\partial B} [G(\mathbf{x}; \mathbf{y}) * s(\mathbf{y}) - S(\mathbf{x}; \mathbf{y}) * u(\mathbf{y})] ds_y \quad (2)$$

$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ は入射波の項を表し, C は $\mathbf{x}$ の位置によって決まる係数で, 境界 ∂B が滑らかであると仮定すると, $\mathbf{x} \in \partial B$ のとき $I/2$ の値をとる (I は恒等テンソル)。 $G(\mathbf{x}; \mathbf{y}|t)$, $S(\mathbf{x}; \mathbf{y}|t)$ は基本特異解, 第二基本特異解である。時間領域ではこれらを解析的に求めることは一般的にできないが, ここではそれが与えられているものとして定式化を進める。以上より, (2) は $\mathbf{x}$ が境界 ∂B 上にあるとき, 境界関数 $\mathbf{u}, s$ の間に成立すべき条件を与え, 境界上でこのどちらかの関数が与えられれば未知の関数に関する積分方程式となる。境界要素法を導くために, 積分公式 (2) における境界上の関数 $\mathbf{u}, s$ に適当な近似を導入し (2) を離散化すると, 以下のようになる。

$$C(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \simeq \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + \sum_m \sum_K (A_{mK}(\mathbf{x}, t) \cdot s_m^K - B_{mK}(\mathbf{x}, t) \cdot u_m^K) \quad (3)$$

$$\text{ここに,} \quad A_{mK}(\mathbf{x}, t) = \int_{\partial B} [G(\mathbf{x}; \mathbf{y}) * \psi_K^s] \phi_m(\mathbf{y}) ds_y \quad B_{mK}(\mathbf{x}, t) = \int_{\partial B} [S(\mathbf{x}; \mathbf{y}) * \psi_K^u] \phi_m(\mathbf{y}) ds_y \quad (4)$$

影響関数の計算法 波動方程式 (1) を $f^*(\omega) = \mathcal{F}[f] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$ により Fourier 変換すると

$$G^* \nabla^2 \mathbf{u}^* + \left(K^* + \frac{G^*}{3} \right) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}^* = -\rho \omega^2 \mathbf{u}^* \quad (5)$$

を得る。ここに, $G^* = -i\omega \mathcal{F}[G]$, $K^* = -i\omega \mathcal{F}[K]$ は複素弾性係数である。(5) の基本特異解を以下に示す。

$$G^*(\mathbf{x}; \mathbf{y}|\omega) = \frac{i}{4G^*} \left\{ \begin{array}{c} I \\ \nabla r \nabla r \end{array} \right\}^T \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \kappa^2 H_0^{(1)}(k_L r) \\ H_0^{(1)}(k_T r) \\ -\frac{\kappa^2}{k_L r} H_1^{(1)}(k_L r) + \frac{1}{k_T r} H_1^{(1)}(k_T r) \end{array} \right\} \quad (6)$$

ここに $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, 縦波, 横波の複素波数 k_L, k_T は位相速度 $c_L = \sqrt{(K^* + 4/3 G^*)/\rho}$, $c_T = \sqrt{G^*/\rho}$ により $k_L = \omega/c_L$, $k_T = \omega/c_T$ で与えられる。 $\kappa = k_L/k_T$ は縦波と横波の比でポアソン比により決定される。

周波数領域の基本解 G^* は時間領域の基本解の Fourier 変換 $G^*(\mathbf{x}; \mathbf{y}|\omega) = \mathcal{F}[G(\mathbf{x}; \mathbf{y}|t)]$ であるから, 時間領域の基本解 G は Fourier 逆変換により得ることができる。結局, (3) の影響関数 (4) は周波数領域の基本解を用い $G(\mathbf{x}; \mathbf{y}) * \psi_K^s = \mathcal{F}^{-1}[G^*(\mathbf{x}; \mathbf{y}) \mathcal{F}[\psi_K^s]]$, $S(\mathbf{x}; \mathbf{y}) * \psi_K^u = \mathcal{F}^{-1}[S^*(\mathbf{x}; \mathbf{y}) \mathcal{F}[\psi_K^u]]$ と表される [1]。

3 解析例

無限粘弾性体中にある空洞に、横波が入射した時の空洞上の変位と周方向応力を時間軸について表したものである。空洞の入射前面の裏側では粘性の効果が強く現れ、解析時間が増えるにつれその粘弾性的性質は顕著に現れてくる。

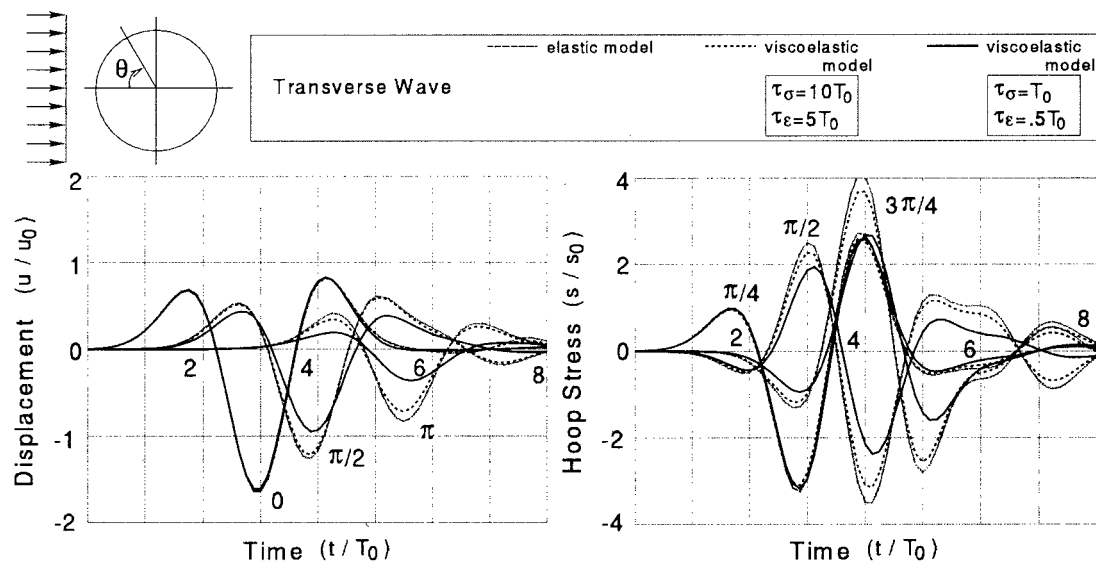


Fig.1 Displacement and Hoop Stress around a cavity

4 Biot 物体中における波動問題の境界要素法解析

Fig.2 は Biot 物体中に存在する空洞に、一定の角周波数を持った平面波が入射した場合の空洞上の周方向応力成分を、流体の粘性係数 μ_f 、透水係数 k 、固体の空隙率 β からなる散逸係数 $b = (\mu_f \beta^2)/k$ の違いによりプロットしたものである。Biot の固体-流体二相混相体のモデルについて、2 次元波動問題の周波数領域境界要素法を用いて解析した。Biot 物体における周波数領域の波動問題を固体の変位と流体の圧力とを用いて定式化し、それに対する相反定理、境界値問題について考察した [2]。解析ではとくに、平面波の伝播特性には散逸性による影響が大きいことが確認された。

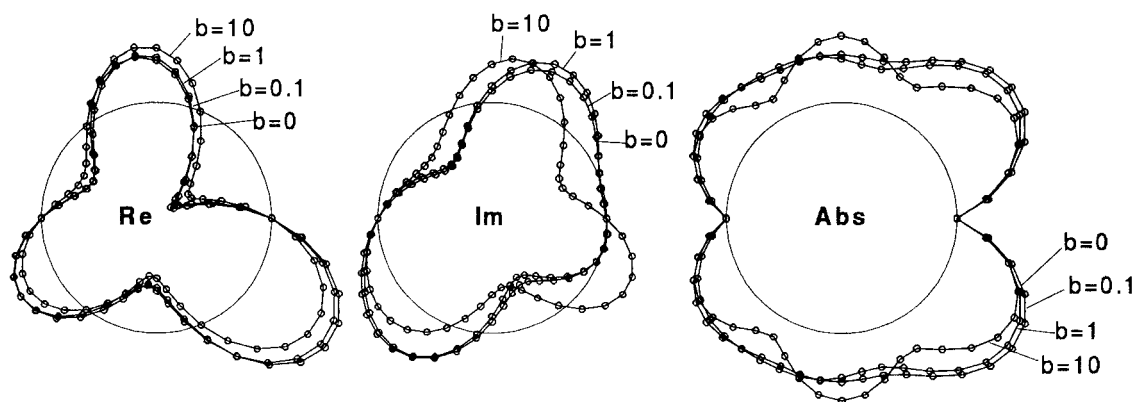


Fig.2 Hoop stress around a cavity

参考文献

- [1] 福井卓雄, 船戸慶輔, 井上耕一: 粘弾性面内波動問題の時間領域境界要素法, BEM・テクノロジー・コンファレンス論文集, 第6巻, pp.1-6, 1996.
- [2] 福井卓雄, 船戸慶輔, 井上耕一: Biot 物体中における波動問題の周波数領域境界要素法解析, 境界要素法論文集, 第13巻, pp.149-152, 1996.