

準直交異方性弾性体のクラックの解析

名古屋工業大学 学生員 ○佐藤 将寛
名古屋工業大学 正 員 長谷部 宣男

1. まえがき 直交異方性平面弾性問題において、異方性の主軸の方向と座標軸 x 、 y の方向とが一致するとき、Airy の応力関数 $F(x, y)$ を用いると、その基礎微分方程式は、

$$\frac{1}{E_y} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \left(\frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\nu_x}{E_x} \right) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{E_x} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \quad (1)$$

と表わされる。ここに、 E_x 、 E_y はそれぞれ x 、 y 軸方向の弾性定数、 G_{xy} はせん断弾性係数、 ν_x はポアソン比である。上式の特微方程式 $s^4 + (E_x/G_{xy} - 2\nu_x)s^2 + E_x/E_y = 0$ の特微根は、弾性定数の間の関係より次の三通りの複素根を有する場合に分けられる。(実根を有しないことは証明されている)

$$\text{Case I : } s_1 = s_2 = \alpha i \quad \text{Case II : } s_1 = \alpha i, s_2 = \beta i \quad \text{Case III : } s_1 = \alpha + \beta i, s_2 = -\alpha + \beta i \quad (2)$$

本論文では、そのうちの Case I の場合を準直交異方性弾性体と呼び、平面弾性問題として図-1(a)に示す、長さ l_a 、角度 θ_a のクラックを有する弾性板に x 軸方向一様引っ張り荷重 P_{xa} が作用した場合の有理写像関数を用いた解析をもとに、準直交異方性弾性体の応力拡大係数と等方性弾性体の応力拡大係数の関係を求める。

2. 解析法 解析法は文献【1】に準じて以下のように行う。まず、弾性定数の間に $1/G_{xy} - 2\nu_x/E_x = 2/\sqrt{E_x E_y}$ なる関係があるときに Case I の場合が成り立ち、 $s_1 = s_2 = \sqrt{E_x/E_y}i$ (以下、 $\sqrt{E_x/E_y} = k$ とおく) である。よって、 $x_1 = x$ 、 $y_1 = ky$ なる変数変換(アフィン変換)を行うと基礎微分方程式は次式となり、その解法は等方性のそれに準じたものとなる。

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x_1^2 \partial y_1^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y_1^4} = 0 \quad (3)$$

図-1(a)に示す領域のアフィン変換を行うことによって、 x_1 、 y_1 座標面の領域、図-1(b)を得る。ここで、複素変数 $z_1 = x_1 + iy_1 = x + iky$ および、以下に示す z_1 平面の領域を図-1(c)のように単位円内部に等角写像する関数 $z_1 = \omega_1(\zeta_1)$ を導入する。

$$z_1 = \omega_1(\zeta_1) = \frac{E_{10}}{1 - \zeta_1} + \sum_{k=1}^{24} \frac{E_{1k}}{\zeta_{1k} - \zeta_1} + E_{-11} \quad (E_{10}, E_{1k}, E_{-11}, \zeta_{1k} \text{ は形状によって決まる定数}) \quad (4)$$

複素関数 $z_1 = x_1 + iy_1 = x + iky$ の正則な応力関数 $\phi_1(z_1)$ 、 $\psi_1(z_1)$ を用いると、応力成分 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} は、

$$\sigma_x/k^2 + \sigma_y = 2[\phi_1'(z_1) + \overline{\phi_1'(\overline{z_1})}] = 4\text{Re}[\phi_1'(z_1)] \quad \sigma_y - \sigma_x/k^2 + 2i\tau_{xy}/k = 2[\overline{z_1}\phi_1'(z_1) + \psi_1'(z_1)] \quad (5)$$

と表される。よって、上で導入した写像関数 $z_1 = \omega_1(\zeta_1)$ を用いて複素応力関数を $\phi_1(z_1) = \phi_1\{\omega_1(\zeta_1)\} \equiv \Phi(\zeta_1)$ 、 $\psi_1(z_1) = \psi_1\{\omega_1(\zeta_1)\} \equiv \Psi(\zeta_1)$ と置き換え、境界条件式を考慮して等方性平面弾性問題同様の操作を施すことによって、 $\Phi(\zeta_1)$ 、 $\Psi(\zeta_1)$ が求められる。

3. 応力拡大係数 アフィン変換後(図-1(b))のクラック先端における応力拡大係数は応力関数を用いて、次式により得られる。

$$K_{II} - iK_{III} = 2\sqrt{\pi e^{-\frac{\theta_1}{2}}} \frac{\Phi'(\zeta_{10})}{\sqrt{\omega_1'(\zeta_{10})}} \quad (\zeta_{10} \text{ は } \zeta_1 \text{ 平面でのクラック先端の座標}) \quad (6)$$

また、アフィン変換後の平面において、クラック先端を原点として r_1 、 θ_1' 極座標をとれば、 $r_1 \ll \theta_1'$ なる範囲

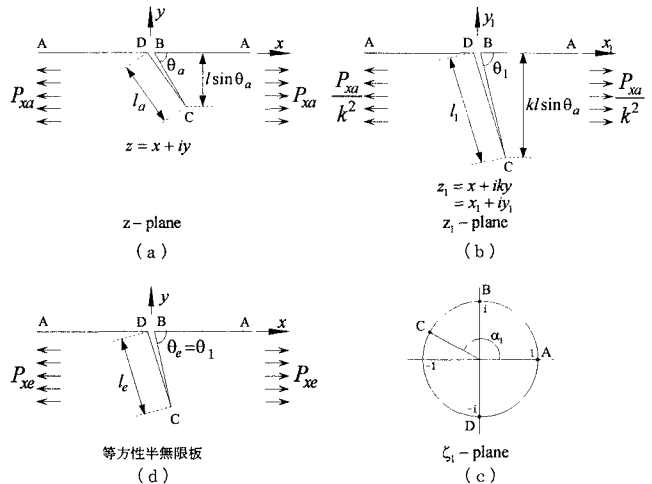


図-1 異方性弾性体の物理面(z -平面)とアフィン変換して得られる座標面(z_1 -平面)および等方性弾性体半無限板

での任意点 (r_1, θ'_1) の応力場と応力拡大係数の関係は等方性の場合と同じで次式で表わされる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{x_1} \\ \sigma_{y_1} \\ \tau_{x_1 y_1} \end{Bmatrix} = \frac{K_{I1}}{\sqrt{2\pi r_1}} \begin{Bmatrix} \cos \frac{\theta'_1}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta'_1}{2} \sin \frac{3}{2} \theta'_1\right) \\ \cos \frac{\theta'_1}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta'_1}{2} \sin \frac{3}{2} \theta'_1\right) \\ \cos \frac{\theta'_1}{2} \sin \frac{\theta'_1}{2} \cos \frac{3}{2} \theta'_1 \end{Bmatrix} + \frac{K_{II1}}{\sqrt{2\pi r_1}} \begin{Bmatrix} -\sin \frac{\theta'_1}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta'_1}{2} \cos \frac{3}{2} \theta'_1\right) \\ \sin \frac{\theta'_1}{2} \cos \frac{\theta'_1}{2} \cos \frac{3}{2} \theta'_1 \\ \cos \frac{\theta'_1}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta'_1}{2} \sin \frac{3}{2} \theta'_1\right) \end{Bmatrix} \quad (7)$$

一方、準直交異方性の物理平面で、クラック先端を原点として r 、 θ' 極座標をとり、文献【2】で式(1)の特性根を用いて定義された応力拡大係数に、 $s_1 \rightarrow s_2 = ki$ の極限操作を行うことにより次式を得る。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{K_{Ia}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \begin{Bmatrix} \frac{k^2}{2(\cos \theta' + ki \sin \theta')^{3/2}} \\ \frac{1}{\sqrt{\cos \theta' + ki \sin \theta'}} \\ \frac{k^2 \sin \theta'}{2(\cos \theta' + ki \sin \theta')^{3/2}} \end{Bmatrix} + \frac{K_{IIa}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \begin{Bmatrix} \frac{3k^2 \sin \theta' - 4ki \cos \theta'}{2(\cos \theta' + ki \sin \theta')^{3/2}} \\ \frac{\sin \theta'}{2(\cos \theta' + ki \sin \theta')^{3/2}} \\ \frac{2 \cos \theta' - ki \sin \theta'}{2(\cos \theta' + ki \sin \theta')^{3/2}} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

ここで、式(7)、(8)を比較することにより、次の関係が得られる。

$$K_{Ia} + iK_{IIa} = K_{I1} + kiK_{II1} \quad (9)$$

よって、式(6)、(9)より準直交異方性弾性板のクラック先端(図-1(a))での応力拡大係数が求まる。ここで、図-1(d)のように等方性弾性体において、長さ l_e 、角度 $\theta_e = \theta_1 = \tan^{-1}(k \tan \theta_a)$ のクラックを有する弾性板に x 軸方向一様引張り荷重 P_{xe} が作用する場合を考え、図-1(b)のアフィン変換後のクラックと比較する。クラック長が l_1/l_e 倍、荷重が $P_{xa}/k^2 P_{xe}$ 倍であること、および $l_1 = \sqrt{k^2 l_a^2 \sin^2 \theta_a + l_a^2 \cos^2 \theta_a}$ を考慮すると、クラックに関する相似則より次の関係式が得られる。

$$K_{I1} + iK_{II1} = \frac{P_{xa}}{k^2 P_{xe}} \sqrt{\frac{l_a}{l_e}} \sqrt{k^2 \sin^2 \theta_a + \cos^2 \theta_a} (K_{Ie} + iK_{Ile}) \quad (10)$$

したがって、式(9)、(10)より次式を得る。

$$K_{Ia} + iK_{IIa} = \frac{P_{xa}}{k^2 P_{xe}} \sqrt{\frac{l_a}{l_e}} \sqrt{k^2 \sin^2 \theta_a + \cos^2 \theta_a} (K_{Ie} + kiK_{Ile}) \quad (11)$$

なお、解析には次式で定義される無次元化された応力拡大係数を用いている。

$$F_{Ie} + iF_{Ile} = (K_{Ie} + iK_{Ile}) / P_{xe} \sqrt{\pi l_e}$$

$$F_{Ia} + iF_{IIa} = (K_{Ia} + iK_{IIa}) / P_{xa} \sqrt{\pi l_a}$$

4. 結果と考察 直交異方性平面弾性問題で式(2)の Case I の場合には、解析したい異方性平面にアフィン変換を施して得られるクラック、荷重と相似形のクラック、荷重を有する等方性平面での応力拡大係数から、式(11)によって容易に応力拡大係数を求めることができる。図-2 に等方性弾性体および準直交異方性弾性体のクラック先端での応力拡大係数の解析例を示す。例えば、図-1(a)において $E_x/E_y = 3$ 、 $\theta_a = 50^\circ$ である場合の応力拡大係数

を知りたいときは、図-1(d)において $\theta_e = \theta_1 = \tan^{-1}(k \tan 50^\circ) = 57.48^\circ$ である場合の応力拡大係数から式(11)を用いて求めることができる。このことは、 a_e 点、 b_e 点より a_a 点、 b_a 点を求めることに相当しており、結局図-1(d)のような等方性弾性板の K_{Ie} 曲線および K_{Ile} 曲線さえ得られれば、図-1(a)に示すような準直交異方性弾性板の応力拡大係数を容易な計算によって求めることができる。

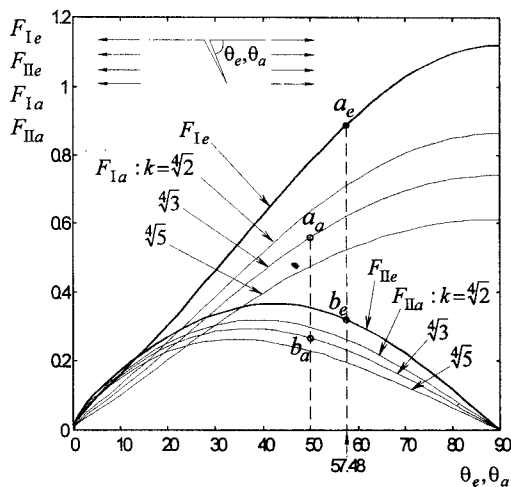


図-2 等方性弾性体および異方性弾性体におけるクラック先端での応力拡大係数

- 【参考文献】 【1】長谷部宣男：ある種の直交異方性板の応力集中と応力解析、土木学会論文報告集 233 号、1975
【2】G.C.Sih & E.P.Chen：Cracks in composite materials、1981