高速多重極境界要素法を用いたクラック群の進展解析

福井大学大学院　学生員　○　持田哲郎
福井大学大学院　学生員　　　井上耕一
福井大学工学部　正会員　　　福井卓雄

1　はじめに

本研究は, 境界要素法を利用して, 大規模なクラック群の中のクラックの進展挙動を正確に追跡できる手法を開発することを目的としている。

解析の高精度化をはかるため, クラック先端の変位分布を模倣したクラック先端要素を導入し, また境界要素法に高速多重極法 [1] を導入することにより, 解析の効率化をはかり, 大規模なクラック群の解析を可能にする。単一クラックおよび複数クラックの進展解析を行い, 本手法の適用性について検討する。

2　境界積分方程式とその離散化

等方等質弾性体の平面問題を扱う。無限弾性体中に M 個のクラック $S_1, S_2, \ldots, S_M$ が存在し, 無限遠に応力 $\boldsymbol{\sigma}^0$ が作用する問題を考える。このとき, 変位場 $\boldsymbol{u}$ は Navier の方程式を満足する。また, 場の応力 σ_{ij} は

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \Sigma_{ijk} u_k = \sigma_{ij}^0 + G\left(u_{i,j} + u_{j,i} - \frac{\kappa - 3}{\kappa - 1}\delta_{ij} u_{k,k}\right) \tag{1}$$

により与えられる。ここに, u_i は変位, G はせん断弾性係数, κ は Poisson 比 ν により決まるパラメータで, 平面ひずみのとき$\kappa = 3 - 4\nu$, 平面応力のとき $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$ である。問題は, Navier の方程式を満足し, クラック面上で $n_j\sigma_{ji}(\boldsymbol{x}) = 0 \quad \boldsymbol{x} \in S_K \ (K = 1, 2, \ldots, M)$ を満足する変位を決定する問題となる。クラック表面では, $n_j\sigma_{ji}(\boldsymbol{x}) = 0$ より, 境界応力は$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{0}$ であるから次の式が満足されなければならない。

$$0 = n_j\sigma_{ji}^0(\boldsymbol{x}) - \sum_{K=1}^{M}\int_{S_K} n_l \Sigma_{lik}^x S_{kj}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})[u_j](\boldsymbol{y})ds_y \tag{2}$$

上の式で, $[\boldsymbol{u}]$ はクラック開口変位で, クラック面の法線と同じ向きの面上の変位を $\boldsymbol{u}^+$, 反対の向きの面上の変位を $\boldsymbol{u}^-$ とするとき, $[u_i] = u_i^+ - u_i^-$ で定義している。また, $\boldsymbol{S}$ は第二基本特異解である。(2) はクラック開口変位 $[\boldsymbol{u}]$ を未知関数とする積分方程式となる。

クラック面上に近似基底 $f_I(\boldsymbol{x})$ を導入して, 未知関数を $[\boldsymbol{u}](\boldsymbol{x}) = \sum_I^N f_I(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{u}]^I$ で近似すると, (2) は

$$\sum_I^N D_{ij}^I(\boldsymbol{x})[u_j]^I = n_j\sigma_{ji}^0(\boldsymbol{x}), \qquad D_{ij}^I(\boldsymbol{x}) = \int_S n_l\Sigma_{lik}^x S_{kj}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) f_I(\boldsymbol{y})\, ds_y \tag{3}$$

となる。ここに, $\boldsymbol{D}^I$ は影響関数である。与えられた応力 $\boldsymbol{\sigma}^0$ に対してクラック上の N 個の選点$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_N$ において方程式 (3) を満足させるように未知の値 $[\boldsymbol{u}]^1, [\boldsymbol{u}]^2, \ldots, [\boldsymbol{u}]^N$ を決定すれば, クラック開口変位 $[\boldsymbol{u}]$ を近似的に決定することができる。

3　クラック先端要素

通常要素については, 線形要素とし, 区間上に $0 \leq t \leq 1$ となるパラメータ t を導入して, 近似基底 $\phi_i (i = 1, 2)$ を$\phi_1(t) = 1 - t, \ \ \phi_2(t) = t$ とすると, 境界関数は

$$f_I(t) = \phi_1(t) f_1 + \phi_2(t) f_2 \tag{4}$$

と表すことができる。しかしながら，この近似をクラックの先端にまで適用すると，クラック先端における解を十分に表現できないことが知られている。そこで，クラック先端要素については，クラック先端の変位分布を模倣した関数

$$f_I(\boldsymbol{x}) = \sqrt{2s/a} \tag{5}$$

を使った（図-1）。ここに，s はクラック先端からとった長さであり，a は要素の長さである。また，このクラック先端要素は進展解析に必要な応力拡大係数 K_I, K_{II} を簡便に決定するためにも使う。

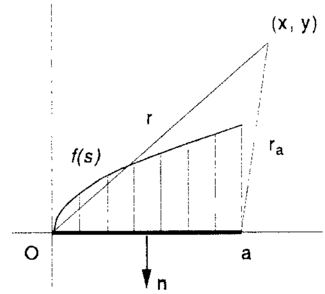

図-1　クラック先端要素

4　高速多重極境界要素法

多数のクラックが存在する場を，従来の境界要素法を使って解析しようとすると極めて巨大な計算時間を必要としてしまう。そこで，高速多重極境界要素法 [2] を使ってこの計算を効率化した。

高速多重極境界要素法の基本的な考え方は，離散方程式 (3) をそのままの形で直接に行列を計算して解く代りに，あらかじめ要素群をグループ化して少数の多重極に置き換え，多重極による弾性場の和を取ることにより，方程式を解くために必要となる行列ベクトル積の計算を実質的に $O(N)$ 程度の計算で済まそう，とすることである。定式化において，境界積分方程式および境界要素法については通常の実数関数としての定式化を行い，多重極展開とその局所展開には複素解析関数の表現を用いる方法をとった。

5　クラック進展解析の手順

クラック進展の数値解析は以下のような手順で行った。

1. 境界要素方程式 (3) を解いて，クラック開口変位 $[\boldsymbol{u}]$ およびクラック先端の応力拡大係数 K_I, K_{II} を求める。

2. 進展開始条件を満足する場合には，さらに，進展方向 θ を決定して，長さ Δl だけクラックを伸ばす。進展開始条件は，K_I の値だけを使って，$K_I < K_C$ ($K_C < 0$) or $K_I > K_T$ ($K_T > 0$) とした。進展方向 θ は，クラック進展後のクラック先端において $K_{II} = 0$ となる方向とした。進展長 Δl は，通常はクラック要素の平均長にとっているが，$|K_I|$ が小さい場合には $|K_I|$ に比例させて短くした。

3. クラックの進展により発生するエネルギ ΔU を求めて，$-\Delta U > \epsilon$ の場合には，クラックが伸び続けるとして，1. からの計算を繰り返し，そうでない場合にはクラックの伸びが止まったものとする。

6　数値解析例

本手法の妥当性を確認するために，単一クラックの進展解析，複数クラックの進展解析など種々の進展解析を行った。

一様圧縮応力場 $\sigma_{22} = -\sigma_0$, $\sigma_{11} = \sigma_{12} = 0$ のもとでの 5 個のクラックの進展解析の結果を図-2に示す。初期クラックの傾きは $\alpha = 30^\circ$ である。左側は進展後のクラックの形状を，右側はクラック面の開口変位を表している。

また，ランダムに配置されたクラック群の進展解析も行った。詳細は当日報告する。

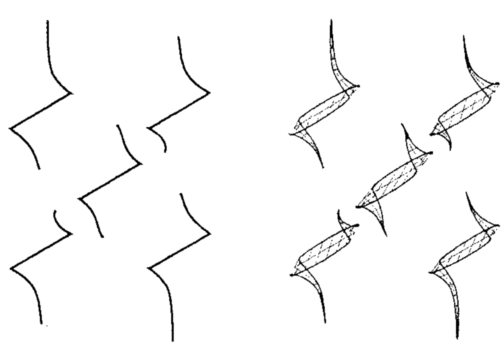

図-2　圧縮応力下の 5 個のクラック

参考文献

[1] Greengard, L. and V. Rokhlin : A fast algorithm for particle simulations, *J. Comp. Phys.*, **73** (1987) pp. 325–348.
[2] 福井卓雄，持田哲郎：高速多重極境界要素法の２次元静弾性問題への応用，境界要素法論文集，**13** (1996) pp. 131–136.