

面外力を受ける有限連続板のプロセスゾーンの長さ と 断面力集中

中日本建設コンサルタント(株) 前田春和
 岐阜大学工学部土木工学科助手 藤井康寿
 岐阜大学工学部土木工学科教授 中川建治

1. まえがき

本報告は、有限部分で連続する半無限板（直線状の外側き裂を持つ薄板）（図-1 参照）が面外力を受ける場合のたわみ曲面を導く 1 つの解法を示すものである。

解の特徴はき裂の先端で有限な応力集中と開口変位を共存させるプロセスゾーン相当部分を構成することである。導かれた解を基にして、連続部分に作用する面外せん断力やねじり力の断面力比（連続部に生じる最大集中断面力と平均断面力との比率）とプロセスゾーンの長さ比（プロセスゾーンの長さ と 連続部の長さの比率）との関係を示す。

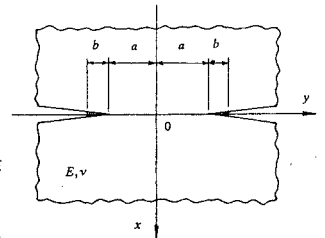


図-1 解析モデル

2. 直線状き裂の面外問題

等方等質の薄い板の面外たわみ W の一般解は古典理論によると重調和関数であって、任意の調和関数 $\psi(z)$, $\phi(z)$ によって次のように表される。また、 λ を任意定数として 2 つの調和関数 $\psi(z)$, $\phi(z)$ を次のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 W &= 0 \\ z &= x + iy, \quad \bar{z} = x - iy \\ W &= \bar{z} \psi(z) + \phi(z) \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \phi(z) &= z \psi(z) + \lambda \Psi(z) \\ \Psi(z) &= \int \psi(z) dz \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここでは、直線状の外側き裂（有限連続）を y 軸上に持つ無限板（図-1 参照）に対して、 y 軸上の断面力の分布が次のような 2 通りの状態となる解（解-I と 解-II）を誘導する。

（解-I） $M_x|_{x=0} \equiv 0$ を常に満足するもの

（解-II） $R_x|_{x=0} \equiv 0$ を常に満足するもの

3. 無理関数による外側き裂の基本開口関数

ここでは次のような事項を前提として基本開口関数 $f(z, a)$ を導く手法を採用する。

- 1) y 軸上で実数あるいは純虚数の値しか採らない関数として、2 次の無理関数を採用する。
- 2) 曲げモーメントやせん断力が特異点近傍で無限大にならないように、2 階あるいは 3 階導関数が特異点で発散しないような関数型とする。
- 3) $f(z, a)$ によって y 軸上の区間 $a < |y| < a + b$ でプロセスゾーン相当部分（関数値が純虚数から複素数を経て実数へ滑らかに変化する部分）を構成するためには $f(z, a + b) - f(z, a)$ とする手段を採用する。

y 軸上の断面力分布を優先して関数を決定するのが好都合であるから、 $f_1'''(z, a)$, $f_2'''(z, a)$ を以下のよう

$$f_1'''(z, a) = \sqrt{z^2 + a^2}, \quad f_2'''(z, a) = iz\sqrt{z^2 + a^2} \quad (2)$$

4. 計算例

1) 計算例-1: 基本解の例示

式(2)で定義した関数が y 軸上で外側き裂としての境界条件を満足していることを図によって示す。解析用のデータとして、板の物理定数、サイズに関する数値は次のように設定する。（板の厚さ : $t = 1 \text{ cm}$ 、ヤング係数 : $E = 2.06 \times 10^5 \text{ MPa}$ 、ポアソン比 : $\nu = 0.3$ 、 y 軸上連続部の長さ : $2a = 2 \text{ cm}$ 、プロセスゾ

ー長さ: $b = 0.3\text{cm}$ 、 $c_2 = a/(a+b)$ 、 $c_3 = (a+b)/a$)

例として、解-I に $f_1(z, a)$ を代入した場合を図-2 に、 $f_2(z, a)$ を代入した場合を図-3 に示す。

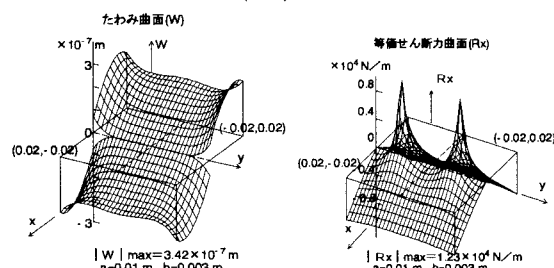


図-2 解-I で関数 $f_1(z, a)$ を使用

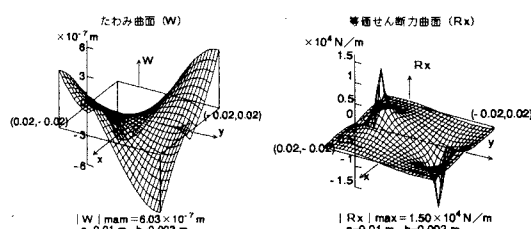


図-3 解-I で関数 $f_2(z, a)$ を使用

2) 計算例-2 : 断面力集中度の比較

y 軸に沿って純せん断が作用する場合と純曲げが作用する場合、及び純ねじりが作用する場合について、プロセスゾーン長さとき裂先端における断面力集中度の関係について計算した。計算例-1 の場合の板の物理定数はそのままにして、プロセスゾーン長さ b を変化させて β と α との関係求めて結果を図-4 に示す。縦軸は断面力集中度 α 、横軸はプロセスゾーン幅比 β である。

(a) y 軸上で純せん断、純曲げが作用する場合

$$\alpha = \frac{F_{\max}}{\bar{F}}, \quad \beta = \frac{b}{2a}, \quad \bar{F} = \frac{\Sigma F}{2(a+b)}, \quad \Sigma F = \int_{-(a+b)}^{a+b} F_x(y) dy$$

ここで b : プロセスゾーン長さ

$2a$: y 軸上の連続部長さ

$F_{\max}$: き裂先端における最大断面力

(b) y 軸上で純ねじりが作用する場合

$$\alpha = \frac{R_{\max}}{R_0}, \quad \beta = \frac{b}{2a}, \quad R_0 = \frac{3\Sigma T}{2(a+b)^2}, \quad \Sigma T = \int_{-(a+b)}^{a+b} R_x(y) y dy$$

ここで $R_{\max}$: 発生している最大等価せん断力

図-4 より、プロセスゾーン長さが小さくなる程 (β が小さくなる程)、断面力集中度が $b^{-1/2}$ に比例して大きくなる事が推察される。

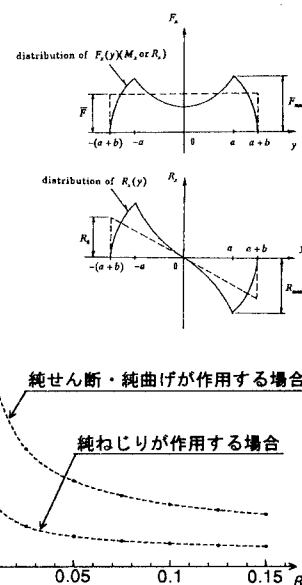


図-4 プロセスゾーン長さと断面力集中度の関係

5. まとめ

薄板の外側き裂の面外問題に対してき裂の先端で開口変位と応力が共存するプロセスゾーン相当区間を設置する解法を適用して一群の解を導く手法を示した。断面力分布は有限化されていることと、曲げモーメントが $1/2$ オーダーの無限大となりせん断力が $3/2$ オーダーの無限大で発散する結論が導かれる従来の問題点は解決されていることを示し得た。最後に本解析法に関する3つの特徴を述べる。

1) 一般解の形を $M_x|_{x=0} \equiv 0$ と $R_x|_{x=0} \equiv 0$ の2つのタイプに分類した。この方式によると、き裂線上の M_x

と R_x の境界条件を満足させることが極めて簡単になる。

2) 解は2次の無理関数を基礎にして開口関数を導いた。

3) この方式による解ではき裂先端両側のプロセスゾーンの長さは両側で等しい場合に限定されている。これは、最も簡単な形で解を導くために2次の無理関数を活用したこと起因する。しかし開口部とプロセスゾーンの長さが異なる解(それぞれの解では両側等しい)を複数個(開口部中心を移動させて)重ねる手法を用いると、結果的にはプロセスゾーンの長さが左右両端で異なる非対称の解も構成し得る。