

スプライン要素法を用いた長方形板のせん断座屈解析

大同工業大学工学部

○広瀬俊子

大同工業大学工学部 正会員

水澤富作

1. はじめに 板の弾性座屈解析に関する研究は古くから多数行われてきているが、せん断座屈問題では、関数の直交性が成り立たなくなるので、Rayleigh-Ritz 法や有限要素法などの数値解析法が用いられている。また、一様圧縮を受ける場合と比較して、せん断座屈問題の解析結果があまり多くないように思われる¹⁾。

本文では、面内せん断荷重を受ける長方形板のせん断座屈解析へのスプライン要素法²⁾の適用について検討し、本手法の収束性や解析精度について示している。また、任意の境界条件を持つ長方形板のせん断座屈特性に与える辺長比や中間線支持などの影響について明らかにする。

2. 解析手法 ここでは、スプライン要素法を用いて長方形板のせん断弾性座屈解析の式の定式化を行う。式の定式化にあたり、次式で示す無次元化された座標を用いている。

また、要素内で仮定される変位関数は、2方向に B-spline 関数を用いて

$$W_{mn}(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^K \sum_{n=1}^L C_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,l}(\eta) \quad \dots (1)$$

$$W_n(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^K \sum_{n=1}^L C_{n, m, k} N_{m,k}(\xi) N_{n,l}(\eta) \quad \dots (2)$$

ここで、 $N_{m,k}(\xi)$ は正規化されたスプライン関数であり、 C_{mn} は未定係数である。また、 $ix=k+Mx-1$ 、 $iy=l+My-1$ 。ただし、 $k-1$ はスプライン関数の次数であり、 Mx と My はそれぞれ x 、 y 方向の要素の分割数である。

次に、図-1 に示す長方形薄板のひずみエネルギー U と面内せん断荷重による外力ポテンシャル V は、それぞれ次式で表される。

$$U = (D/2)(b/a^3) \int_0^a \int_0^b \left\{ (\partial^2 W / \partial \xi^2)^2 + \zeta^2 (\partial^2 W / \partial \eta^2)^2 + 2(1-\nu) \zeta^2 (\partial^2 W / \partial \xi \partial \eta)^2 \right. \\ \left. - 2(1-\nu) \zeta^2 (\partial^2 W / \partial \xi^2) (\partial^2 W / \partial \eta^2) \right\} d\xi d\eta \quad \dots (3)$$

$$V = (1/2) \int_0^a \int_0^b 2N_{xy} \zeta (\partial W / \partial \xi) (\partial W / \partial \eta) d\xi d\eta \quad \dots (4)$$

ただし、 $N_{xy} = S_{xy}(bh/a)$ 、 D は板剛性、 ν はポアソン比、 $\zeta = a/b$ である。

したがって、全ポテンシャルエネルギー $\Pi = U - V \quad \dots (5)$ は、式(2)を代入して書き換えると次式で表される。

$$\Pi = (D/2)(b/a^3) \sum \sum \sum \sum C_{mn} C_{n, m, k} \left[I_{mn}^{22} J_{mn}^{00} + \zeta^4 I_{mn}^{00} J_{mn}^{22} + \zeta^2 \nu (I_{mn}^{02} J_{mn}^{20} + I_{mn}^{20} J_{mn}^{02}) + 2\zeta^2 (1-\nu) I_{mn}^{11} J_{mn}^{11} \right] \\ + (1/2) \sum \sum \sum \sum C_{mn} C_{n, m, k} 2N_{xy} \zeta I_{mn}^{10} J_{mn}^{00} \quad \dots (6)$$

また、式(6)をマトリックス表示すると、次式のようになる。

$$[K][C] - k^*[G][C] = 0 \quad \dots (7)$$

ここで、 k^* は座屈荷重パラメータであり、 $k^* = S_{xy} b^2 / \pi^2 D$ で表される。また、 $[K]$ と $[G]$ は、それぞれ式(3)と(4)から求められる剛性マトリックスと幾何剛性マトリックスであり、 $I_{mn}^{ij} = \int_0^a \int_0^b N_{m,k}^{(i)}(\xi) N_{n,k}^{(j)}(\xi) d\xi$ 、 $J_{mn}^{ij} = \int_0^a \int_0^b N_{n,k}^{(i)}(\eta) N_{n,k}^{(j)}(\eta) d\eta$ である。ただし、 (i) 、 (j) は導関数の次数を示す。

3. 数値計算例及び考察 ここでは、スプライン要素法を用いたせん断断面内荷重を受ける長方形板の弾性座屈解析を行っている。図-2 には、周辺固定された正方形板($a/b=1.0$, $\nu=0.3$)のせん断座屈荷重パラメータ $k^* = S_{xy} b^2 / \pi^2 D$ の収束性に与えるスプライン次数 $k-1$ と要素分割数 $Mx=My$ の影響が示されている。ここで、 $k-1$ は3次から5次にとり、要素の分割数を4分割から12分割まで変化させている。これより、分割数を高めると一様な収束状態が得られ、スプライン次数を高めれば少ない分割数で良い収束値が得られる。また、表-1 には周辺固定と周辺単純支持された正方形板のせん断座屈パラメータの収束性と精度比較について示されている。精度比較のために FEM³⁾により求めた結果も示されている。これより、良く一致した結果が得ら

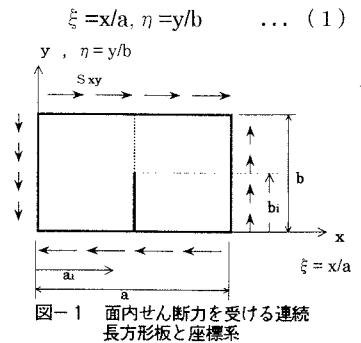


図-1 面内せん断力を受ける連続長方形板と座標系

れている。図-3 は、長方形板のせん断座屈曲線に与える境界条件の影響を示している。これより、辺長比 $a/b \leq 1.5$ の場合に辺長比の影響が顕著に見られ、また境界条件によって異なった座屈モード形状がみられる。図-4 には、 y 軸と平行に一つの線支持された長方形板 ($a/b=2.0$) のせん断座屈荷重パラメータに与える線支持の位置 a_i の影響が示してある。これより、線支持の位置により、境界条件に関係なく座屈荷重パラメータの値が変化するが、中央で線支持された場合が最大の値を示す。また、図-5 は、図-1 に示すような中央で局所的に線支持された長方形板のせん断座屈荷重パラメータに与える支持線の長さ b_i の影響を示している。ここで、 b_i/b は 0 から 1 まで変化させている。これより、 b_i/b の値が 0.5 以内では、大きな影響が見られるが、この値が 0.75 を越えるとあまり大きな変化が見られなくなる。これは、座屈モード形状に関係し、 b_i/b が 0.75 を越えると、その形状が変化しなくなるためである。

表-1 せん断座屈荷重パラメータ k^* の収束性と精度比較; $a/b=1.0$

スプライン 次数 $k-1$	要素数		
	$M_x = M_y$	SS-SS	CC-CC
3	4	15.27	9.484
	6	14.74	9.352
	8	14.67	9.333
	10	14.65	9.328
4	12	14.65	9.325
	4	14.14	9.343
	6	14.61	9.326
	8	14.64	9.325
5	10	14.64	9.325
	12	14.64	9.325
	4	14.32	9.326
	6	14.59	9.325
FEM[3]	8	14.63	9.325
	10	14.64	9.325
	12	14.64	9.325

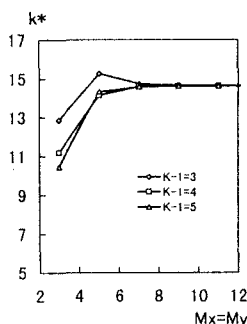


図-2 せん断座屈荷重パラメータ k^* の収束性に与える $k-1$ の影響; CC-CC, $a/b=1.0$

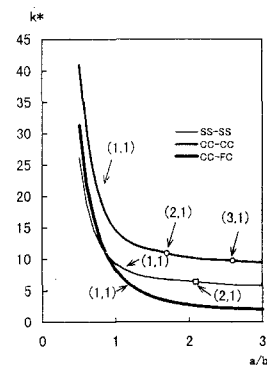


図-3 せん断座屈荷重曲線に与える境界条件の影響

表-2 種々の境界条件をもつ長方形板のせん断座屈荷重パラメータ k^*

境界条件	辺長比			
	0.5	1.0	1.5	2.0
CC-CC	40.99	14.64	11.46	10.21
SS-SS	26.18	9.325	7.070	6.546
CC-SS	39.99	12.56	7.815	6.710
CC-SC	40.36	13.38	9.417	8.534
CS-SC	33.18	11.90	9.173	8.296
CS-SS	32.32	10.70	7.365	6.613

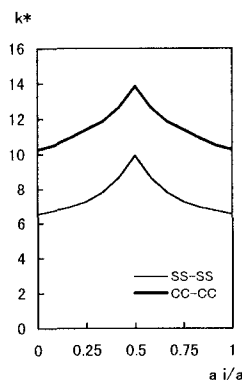


図-4 せん断座屈荷重パラメータに与える中間線支持の影響; $a/b=2.0$, $b_i=b$

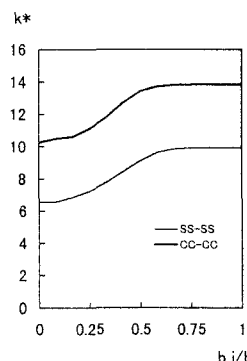


図-5 せん断座屈荷重パラメータに与える中間線支持の長さ b_i の影響; $a_i=a/2$, $a/b=2.0$

最後に、表-2 は、種々の境界条件をもつ長方形板のせん断座屈パラメータを示したものである。

4. おわりに 本文では、スプライン要素法を用いて、長方形板の弾性せん断座屈解析を行い、そのせん断座屈特性に与える辺長比や中間線支持などの影響について明らかにした。主な結果を示せば以下のようになる。1) スプライン要素法を用いれば、少ない分割数で安定した収束値が得られる。2) 長方形板のせん断座屈特性に与える辺長比の影響は辺長比 $a/b \leq 1.5$ の場合、顕著に見られる。3) 長方形板のせん断座屈特性は、中間線支持の位置やその長さにも関係している。

参考文献 1) 半谷裕彦: 平板の基礎理論, 彰国社, 1995. 2) Mizusawa, T., T. Kajita and M. Naruoka, Buckling of skew plate structures using B-spline functions, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, vol.15, pp. 87-96, 1980. 3) Fried, I. and K.H. Schmitt, Numerical resorts from the application of gradient iterative techniques to the finite element vibration and stability analysis of skew plates, *Aero. J.*, vol.76, pp.166-169, 1972.