ファジイ最小二乗法の適用性について

信州大学工学部　正会員　奥谷　巌
信州大学工学部　正会員　○高瀬達夫

1.はじめに

ここで扱う問題は説明変数が通常のデータであり、出力である従属変数がファジィ数であるようなデータがN組与えられたときに、回帰係数もファジィ数として決定するという問題であるが、一般にこうした問題は可能性線形モデルあるいは簡単にファジィ回帰分析モデルと呼ばれている。

この問題の解法として現在知られている方法は、ファジィ出力データを推定ファジィ出力が度合い h 以上で含むという条件の下に、推定ファジィ出力の幅の合計が最小になるように、ファジィ回帰係数を決定する最小化問題法と、逆に、ファジィ出力データが推定ファジィ出力を度合い h 以上で含むという条件下で、推定ファジィ出力の幅の合計を最大にするように、ファジィ回帰係数を決定する最大化問題法の二つの方法である。しかし、これらの方法は、ファジィ出力の幅→0 としたとき従来の回帰分析に一致しないという問題など、必ずしも整合性、適用性の高さに結びつかない問題点を有している。こうしたことに鑑み、本研究では最小二乗法を応用した新たな方法論を開発した。

2.既存の手法

交通行動分析などでファジィ理論を用いた分析手法として、多くの研究に用いられてきた手法にファジィ回帰分析[1)]がある。通常の回帰モデルでは、観測データとモデルによって得られた推定値との差は観測誤差として見なされているが、ファジィ回帰モデルでは推定値とデータとのずれはモデルの構造自身の曖昧さであるとしている。そこでモデルの構造式における係数に曖昧さがあるとし、係数をファジィ数によって表すモデルをファジィ回帰モデルと呼ぶ。

次にファジィ回帰分析モデルの構造式を示す。なお、ここで取り扱う N 組のデータを (Y_i, x_i), $i=1,\cdots,N$ とする。但し、Y_i はファジィ数で $Y_i=(y_i,e_i)_L$、x_i は $x_i=(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{in})^t$ である。ここに、x_{ij} は第 i 組のデータの j 番目の説明変数の値を表すものとする。

このケースでのファジィ回帰式は、以下の２つのLP 問題に帰着することができる。

(a)MIN 問題

$$\min_{\alpha_i,c_i} \sum c^t |x_i| \qquad (1)$$

$$y_i + |L^{-1}(h)| e_i \le x_i{}^t \alpha + |L^{-1}(h)| c^t |x_i| \qquad (2)$$

$$y_i - |L^{-1}(h)| e_i \ge x_i{}^t \alpha - |L^{-1}(h)| c^t |x_i| \qquad (3)$$

$c_i \ge 0, i=1,\cdots,n$

$c^t|x_i|$ ：$\hat{Y}_i$ の幅

α, c ：ファジイ係数の中心、幅

(b)MAX 問題

最大化する目的関数は式(1)、制約条件は式(2),(3)の不等号の向きが変わる問題である。

MIN 問題では式(1)において、ファジィ数 Y_i を上から推定し、Y_i の幅が最小になるようなファジイ推定を行っている。また MAX 問題では、式ファジィ数 Y_i を下から推定し、Y_i の幅が最大になるようなファジィ推定を行っている。そしてファジィデータを用いた場合のファジィ回帰分析モデルでは、MIN 問題・MAX 問題の解をそれぞれファジィ推定の上限・下限という。

ここで度合い h は十分なデータが存在する場合、すべての可能性を含んでいると考えられるので h=0 としてこの LP 問題を解けばよい。

3.ファジイ最小二乗法の提案

ファジィデータを用いた場合のファジィ回帰分析モデルでは、通常データの場合のように結果としてファジィ数を値として得ることができない。また、大きく乖離したデータが存在する場合モデルの構造上、そのデータの影響を大きく受けることになる。

このような問題点を考慮し、データすべてが含まれるような曖昧さを求めることは必ずしも必要ではなく、推定値をより観測値に近い形をなすようにすることが重要であると考えた。またファジィ回帰分析ではファジィ出力の幅を０としたとき従来の回帰分析に一致しないという問題等、モデルの整合性を示しにくかった。そこで本研究ではファジィ数 Y_i の観測値と推定値とのずれを最小にすることを、幅と中心のずれの和を最小にすることと考え、その手法

として最小二乗法を用いたファジィ最小二乗法を提案する。

N組のファジィデータ(Y_i, x_i)，$i=1,\cdots,N$，n個の説明変数による可能性線形関数を

$$\hat{Y}_i = A_0 + A_1 x_{i1} + A_2 x_{i2} + \cdots + A_n x_{in} \quad (4)$$

$\hat{Y}_i$: $\hat{Y}_i = (\hat{y}_i, \hat{e}_i)_L$ のファジィ数推定値

A_j : $A_j = (\alpha_j, c_j)_L$, $j = 0,\cdots,n$ のファジィ係数

とし、観測値と推定値の中心及び幅のずれの二乗和を最小にするようなパラメータA_jを求める。

$$\min \sum_i \{(y_i - \hat{y}_i)^2 + (e_i - \hat{e}_i)^2\} \quad (5)$$

式(5)を満たすためのファジィ係数の推定値$\hat{A}_j = (\hat{\alpha}_j, \hat{c}_j)_L$は最小二乗法の解の求め方を利用し次のように求められる。

$$\hat{a}_j = |\widetilde{B}| / |B|、\ j = 0,1,\cdots,n \quad (6)$$

$|B|, |\widetilde{B}|$ のp行q列目の要素を$B_{pq}, \widetilde{B}_{pq}$とすると

$$B_{pq} = \sum_{i=1}^{N} x_{i,p-1} x_{i,q-1}\text{、但し } x_{i0} = 1$$

$$\widetilde{B}_{pq} = B_{pq}, (q \neq j+1)$$

$$\widetilde{B}_{pq} = \sum_{i=1}^{N} y_i x_{i,p-1}, (q = j+1)$$

同様にして$\hat{c}_j$は式(6)中のy_iをe_iに代えることにより得られる。

図1にファジィ数のメンバシップ関数が三角形型のケースを示した。

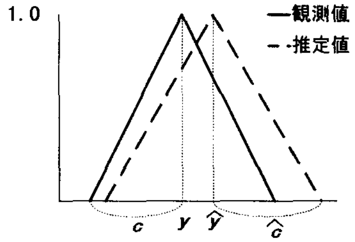

図1　ファジイ数の観測値と推定値の関係

4.乱数を用いたモデル推定による有効性の検討

本研究で提案するファジィ最小二乗法の有効性を確かめるために、ファジィデータを用いてファジィ最小二乗モデル及びファジィ回帰分析モデルでそれぞれ推定を行い、それらの推定結果と観測データとの比較検討を行う。この際用いたファジィデータは乱数を用いて作成した、三角形メンバーシップ関数型のファジィ数とした。

(1)ファジィデータの作成

まずN個の正規乱数を、説明変数x_{ij}、係数a_{ij}、誤差εそれぞれについて発生させる。次にi番目の乱数の組で$y_i = a_{i0} + a_1 x_{i1} + \cdots + a_{in} x_{in} + \varepsilon$ を満たすようなy_iを求める。これをN組すべて行い、y_iの平均$\bar{y}$・標準偏差sを求める。同様のことを多数回実行することにより$\bar{y}, s$の関係（$s = F(\bar{y})$）を見いだす。

再び乱数を発生させ説明変数x_{ij}、それらより得られたy_iと $s = F(y)$を満たすsを求めファジィ数Y_i（$Y_i = (y_i, bs)_L$, bは定数）を決定する。

以上の手順を繰り返すことによりファジィデータ（Y_i, x_i）を得る。

(2)モデルによる推定及び結果の比較

(1)で作成したデータを用いてファジィ回帰モデルとファジィ最小二乗モデルによる推定を行い、推定パラメータ$\hat{A}_j$を求める。そして、それぞれのモデルで得られた推定パラメータ$\hat{A}_j$が係数a_jの正規分布にどれほど近いかを検証する。

次に再度(1)の手順を行い、N個のy_iを得る。また推定パラメータ$\hat{A}_j$の中心$\hat{\alpha}_j$を式(7)を満たすような$\hat{y}_i$をN個求め、y_iと$\hat{y}_i$から相関係数等を求め、整合性の検討を行う。

$$\hat{y}_i = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 x_{i1} + \cdots + \hat{\alpha}_n x_{in} \quad (7)$$

なおファジィ回帰モデルでは上限と下限の二つの値が存在するので、二つのファジィ数の中心の平均値を$\hat{y}_i$のかわりに用いた。

また、乱数発生時の平均及び分散の値を変化させて同様の手順で分析を行った。

結果は講演時に示す。

5.おわりに

本研究では近年様々な分野で用いられてきているファジィという概念を用いて、一般に定式化されているファジィ回帰分析に注目し、特にファジィデータを用いた場合の問題点をふまえ、最小二乗法を用いた新たなモデルの提案を行った。そして乱数を用いて従来モデルと新たなモデルによる比較を行いその有効性を検討した。

参考文献

1) 寺野寿郎・浅井喜代治・菅野道夫：ファジィシステム入門，オーム社，pp67-80，1987