弾粘塑性材料への均質化法の適用

名古屋大学大学院工学研究科　学生員　○田口 知寛
名古屋大学工学部　正会員　清木 隆文
名古屋大学工学部　正会員　市川 康明

1. はじめに

近年、地下空間への需要が高まり地盤材料の研究が重要視されている。一般に地盤材料はその変形・破壊過程において非線形性と時間依存性を有する複雑な挙動を示す。それらの挙動を正確に把握するためにはミクロな構造まで考慮する必要がある。ここでは、構成モデルを $Perzyna/Adachi-Oka$ のモデル[1)]に立脚した弾粘塑性体に対して均質化法[2)]を導入し、時間依存性数値解析を試みる。

2. 弾粘塑性体の均質化法

均質化法はミクロレベルで非均質な構造が周期的かつ規則的に配列された物体に対して、その構造を反映したマクロレベルの材料定数を求め、さらにマクロな解析解からミクロな解を求めることができる理論である。添字 (n) をステップ数とし弾粘塑性体に時間区分 $[t, t+\Delta t]$ について非線形挙動を記述すると

<u>つり合い式</u>

$$\frac{\partial \Delta\sigma_{ij}^{\varepsilon(n)}}{\partial x_j} + \Delta f_i^{\varepsilon(n)} + \left(f_i^{*\varepsilon(n)} + \frac{\partial \sigma_{ij}^{*\varepsilon(n)}}{\partial x_j} \right) = 0 \qquad \text{in } \Omega^\varepsilon \tag{1}$$

<u>ひずみ － 変位関係</u>

$$\Delta\varepsilon_{ij}^{(n)}(\boldsymbol{u}^\varepsilon) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Delta u_i^{\varepsilon(n)}}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta u_j^{\varepsilon(n)}}{\partial x_i} \right) \tag{2}$$

<u>境界条件</u>

$$\Delta\sigma_{ij}^\varepsilon n_j = \Delta F_i(\boldsymbol{x};t) \quad \text{on} \quad \partial\Omega_t^\varepsilon \ , \quad \Delta u_i^\varepsilon = \Delta\bar{u}_i(\boldsymbol{x};t) \quad \text{on} \quad \partial\Omega_u^\varepsilon \tag{3}$$

<u>構成則</u>　$Perzyna$ のモデルより弾粘塑性体においてつぎの関係がいえる。

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{ij}^{(n)} &= \bar{D}_{ijkl}^{(n)}\,\Delta\varepsilon_{kl}^{(n)} - \Delta\sigma_{ij}^{vp(n)} \\ \Delta\sigma_{ij}^{vp(n)} &= \bar{D}_{ijkl}^{(n)}\,\Delta\varepsilon_{kl}^{vp(n)} \\ \bar{D}_{ijkl}^{(n)} &= \left\{ \delta_{oi}\delta_{pj} + \theta\Delta t D_{ijqr}^{(n)} \left(\frac{\partial \varepsilon_{qr}^{vp(n)}}{\partial \sigma_{op}^{(n)}} \right) \right\}^{-1} D_{opkl}^{(n)} \end{aligned} \tag{4}$$

均質化理論において、変位をつぎのように漸近展開する。

$$\Delta u_i^\varepsilon(\boldsymbol{x};t) = \Delta u_i^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};t) + \varepsilon\Delta u_i^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};t) + \varepsilon^2\Delta u_i^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};t) + \cdots \tag{5}$$

ここで、局所座標 $\boldsymbol{y}$ についての周期性 (Y-periodic) を以下のように考慮する。

$$\Delta u_i^\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};t) = \Delta u_i^\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}+\boldsymbol{Y};t) \qquad (\alpha = 0,1,2,\cdots) \tag{6}$$

さらに、微分演算子が $\dfrac{d}{dx_i} \Longrightarrow \dfrac{\partial}{\partial x_i} + \dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{\partial}{\partial y_i}$ となることに注意して、式(3)を展開すると以下のようになる。

$$\Delta\varepsilon_{ij}^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\Delta\varepsilon_{ij}^{0y} + [\Delta\varepsilon_{ij}^{0x} + \Delta\varepsilon_{ij}^{1y}] + \varepsilon[\Delta\varepsilon_{ij}^{1x} + \Delta\varepsilon_{ij}^{2y}] + \cdots \tag{7}$$

ただし　$\Delta\varepsilon_{ij}^{\alpha x} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \Delta u_i^\alpha}{\partial x_j} + \dfrac{\partial \Delta u_j^\alpha}{\partial x_i} \right)$, $\Delta\varepsilon_{ij}^{\alpha y} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \Delta u_i^\alpha}{\partial y_j} + \dfrac{\partial \Delta u_j^\alpha}{\partial y_i} \right)$　$(i,j = 1,2,3;\ \ \alpha = 0,1,\cdots)$

また応力についても、ひずみに対応した形で表せられる。

$$\Delta\sigma_{ij}^\varepsilon(\boldsymbol{x};t) = \frac{1}{\varepsilon}\Delta\sigma_{ij}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};t) + \Delta\sigma_{ij}^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};t) + \varepsilon\Delta\sigma_{ij}^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};t) + \cdots \tag{8}$$

微視問題($O(\varepsilon^{-1})$項)：局所系における

$$\frac{\partial}{\partial y_j}\left\{\bar{D}^{\varepsilon}_{ijkl}(\Delta\varepsilon^{0x}_{kl}+\Delta\varepsilon^{1y}_{kl})-\Delta\sigma^{vp}_{ij}\right\}=0 \tag{9}$$

が得られる。式(9)を周期条件式(6)のもとに弱形式化すると、

$$\int_Y \bar{D}^{\varepsilon}_{ijkl}\Delta\varepsilon^{1y}_{kl}\frac{\partial V_i(\boldsymbol{y})}{\partial y_j}dy=\left\{\int_Y \bar{D}^{\varepsilon}_{ijkl}\frac{\partial V_i(\boldsymbol{y})}{\partial y_j}dy\right\}\Delta\varepsilon^{0x}_{kl}-\int_Y \Delta\sigma^{vp}_{ij}\frac{\partial V_i(\boldsymbol{y})}{\partial y_j}dy \tag{10}$$

となる。ここで、$V_i(\boldsymbol{y})$ はY-periodic な任意関数である。
また、局所形における特性関数を

$$\Delta u^1_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};t)=\chi^{pq}_k(\boldsymbol{y};t)\frac{\partial\Delta u^0_p}{\partial x_q}+c(\boldsymbol{x}) \tag{11}$$

と定義すると、ユニットセルにおける微視的問題が以下のように得られる。

$$\left[\int_Y(\bar{D}^{(n)}_{ijop}\frac{\partial\chi^{kl(n)}_o}{\partial y_p}-\bar{D}^{(n)}_{ijkl})\frac{\partial V_i}{\partial y_j}\,dY\right]\Delta\varepsilon^{0x}_{kl}\;=\;-\int_Y\Delta\sigma^{vp}_{ij}\frac{\partial V_i}{\partial y_j}dY \tag{12}$$

これより χ^{kl}_o を得る。
巨視問題($O(\varepsilon^0)$項)：ε^0 の項にユニットセルに対する平均化$<\bullet>=\frac{1}{|Y|}\int_Y\bullet dy$ を施すとつぎの巨視問題が得られる。ここで D^H_{ijkl} はミクロな幾何構造を反映したマクロな定数であることから均質化弾性定数とよばれる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial\{D^H_{ijkl}\Delta\varepsilon^{0x}_{kl}\}}{\partial x_j}&=\frac{\partial<\Delta\sigma^{vp}_{ij}>}{\partial x_j}-<\Delta f^{\varepsilon}_i>-<f^{*\varepsilon}_i>-\frac{\partial<\sigma^{*\varepsilon}_{ij}>}{\partial x_j}\\ D^H_{ijkl}&=\frac{1}{|Y|}\int_Y(\bar{D}^{(n)}_{ijkl}+\bar{D}^{(n)}_{ijop}\frac{\partial\chi^{kl(n)}_o}{\partial y_p})\,dY\\ \Delta\sigma^{\varepsilon}_{ij}n_j&=\Delta F_i(\boldsymbol{x};t)\;,\;\Delta u^{\varepsilon}_i=\Delta\bar{u}_i(\boldsymbol{x};t)\quad(B.C.)\end{aligned} \tag{13}$$

式(13)を弱形式化すると、

$$\begin{aligned}\int_\Omega D^{H(n)}_{ijkl}\Delta\varepsilon^{0x(n)}_{kl}\frac{\partial\,v_i}{\partial\,x_j}dv&=\int_\Omega\left[\frac{\partial<\Delta\sigma^{vp(n)}_{ij}>}{\partial x_j}-<\Delta f^{\varepsilon(n)}_i>-<f^{*\varepsilon(n)}_i>-\frac{\partial<\sigma^{*\varepsilon(n)}_{ij}>}{\partial x_j}\right]v_i\,dv\\ &+\int_{\partial\Omega}\Delta F_iv_idS\qquad\forall v_i(v_i=0\quad on\quad\partial\Omega_u)\end{aligned} \tag{14}$$

3. 数値解析

式(7)について$\varepsilon\to 0$とすることにより、材料の平均的なひずみが $\Delta\varepsilon^{\varepsilon}_{ij}\simeq\Delta\varepsilon^{0x}_{ij}+\Delta\varepsilon^{1y}_{ij}$ となる。各ステップごとに微視的方程式(12)より特性関数 χ^{kl}_o を求め、D^H_{ijkl} を決定する。その D^H_{ijkl} を用い、大域方程式(14)を離散化し有限要素法を導入して$\Delta\varepsilon^{0x}_{kl}$を解き、引き続き式(11)より$\Delta\varepsilon^{1y}_{kl}$を求めることで時間依存を考慮した平均的なひずみが計算される。ただし、式(13)の右辺第一項は粘塑性成分を表し超過応力関数による降伏判定を行うことで計算される。これらの数値解析により弾粘塑性体を仮定した地盤の時間依存挙動を示す。

参考文献

1) P.Perzyna: The Constitutive Equaiton for Work-Hardring and Rate Sensitive Materials; Proc.of Vibration Problems, Warsaw, 1963

2) E.Sanchez-Palencia: Non-homogeneous media and vibration theory; Lecture notes in phisics, Springer-Verlag, 1980

3) 和仁 雅明: 結晶質岩の時間依存挙動に関する均質化解析, 名古屋大学修士論文, ,1996