大口径円筒構造物に作用する２次近似非線形波力のハイブリッド法による数値解析

名古屋大学大学院　正会員　水谷　法美　名古屋大学大学院　○松本　真一
(株)日本港湾コンサルタント　正会員　真田　武　中部電力(株)　正会員　渡辺　増美
名古屋大学大学院　フェロー　岩田好一朗

１．はじめに： 構造物を海域に設置する場合，作用波力を正確に予測しておくことが基本的に必要である．真田ら[1)]は大口径円筒構造物による２次近似回折波ポテンシャルを MacCamy-Fuchs らの解[2)]を直接２次近似解に拡張することによって Green 関数を用いることなく誘導している．本研究では，任意形状構造物を念頭に置き，仮想境界上で，放射条件を満足する解析解とグリーン公式から得られる数値解とを接続するハイブリッド法に真田らの解を使用することにより，２次のオーダーまで速度ポテンシャルを計算する手法を導く．

２．基礎方程式と境界条件： １次近似，２次近似の回折波ポテンシャル ϕ_1^S, ϕ_2^S は以下の基礎方程式，境界条件を満足する関数となる．

		１次オーダー	２次オーダー
基礎方程式		$\nabla^2\phi_1^S=0$ (1)	$\nabla^2\phi_2^S=0$ (5)
境界条件	自由表面	$\frac{\partial\phi_1^S}{\partial z}-\nu\phi_1{}^S=0$ (2)	$\frac{\partial\phi_2^S}{\partial z}-4\nu\phi_2^S=\frac{i\sigma}{2g}\left\{2\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\right)^2+2\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial y}\right)^2+2\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial z}\right)^2-\phi_1\frac{\partial^2\phi_1}{\partial z^2}+\nu\phi_1\frac{\partial\phi_1}{\partial z}\right\}-\left(\frac{\partial\phi_2^I}{\partial z}-4\nu\phi_2^I\right)$ (6)
	底面	$\frac{\partial\phi_1^S}{\partial z}=0$ (3)	$\frac{\partial\phi_2^S}{\partial z}=0$ (7)
	円筒表面	$\frac{\partial\phi_1^S}{\partial n}=-\frac{\partial\phi_1^I}{\partial n}$ (4)	$\frac{\partial\phi_2^S}{\partial n}=-\frac{\partial\phi_2^I}{\partial n}$ (8)

上記以外に，さらに放射条件が課せられる．１次オーダーに対する式は次式で与えられる．

$$\lim_{r\to\infty}\sqrt{r}\left(\partial\phi_1^S/\partial r-ik\phi_1^S\right)=0 \tag{9}$$

３．外部領域の解： 前章で表した基礎方程式及び境界条件を満足するような外領域の解を，２次のオーダーで次式のようにフーリエ級数の形で表す．

$$\begin{aligned}\phi_2^S(x,y,z)=&\frac{i\sigma k_1^2}{2g}\frac{k_1^2+\nu^2}{4\nu^3}\frac{\cosh k_2(z+d)}{\cosh k_2 d}\sum_{n=-\infty}^{\infty}g_n(k_1r)e^{in\theta}\\&+\frac{i\sigma k_1^2}{2g}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{\pi i}{4}Z_0\frac{\cosh k_2(z+d)}{\cosh k_2 d}\left\{M_{n,1}(r)H_n^{(1)}(k_2r)+M_{n,2}(r)H_n^{(2)}(k_2r)\right\}\right.\\&\left.+\sum_{\ell=1}^{\infty}Z_\ell\frac{\cos k_{2\ell}(z+d)}{\cos k_{2\ell}d}\left\{L_{n,\ell,1}(r)K_n(k_{2\ell}r)+L_{n,\ell,2}(r)I_n(k_{2\ell}r)\right\}\right]e^{in\theta}\\&+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{\cosh k_2(z+d)}{\cosh k_2 d}E_{n,0}H_n^{(1)}(k_2r)+\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{\cos k_{2\ell}(z+d)}{\cos k_{2\ell}d}E_{n,\ell}K_n(k_{2\ell}r)\right]e^{in\theta}\end{aligned} \tag{10}$$

ここに，k_1，k_{1l} は $\nu=k_1\tanh k_1d=-k_{1l}\tan k_{1\ell}d$，$k_2$，$k_{2l}$ は，$4\nu=k_2\tanh k_2d=-k_{2l}\tan k_{2\ell}d$ の解であり，$\nu=\sigma^2/g$ である．また，式中の関数は以下のように定義したものである．

$$\bullet\, g_n(k_1r)=\sum_{M=-\infty}^{\infty}\left(C_mJ_{n-m}(k_1r)H_m^{(1)}(k_1r)+D_{n,m}H_{n-m}^{(1)}(k_1r)H_m^{(1)}(k_1r)\right) \tag{11}$$

$$\bullet \begin{cases} C_m = 2\left\{\alpha_{m+1,0} - \left(3\tanh^2 k_1 d - 1\right)\alpha_{m,0} + \alpha_{m-1,0}\right\} & (12) \\ D_{n,m} = -\left\{\alpha_{n-(m+1),0} - \left(3\tanh^2 k_1 d - 1\right)\alpha_{n-m,0} + \alpha_{n-(m-1),0}\alpha_{m-1,0}\right\} & (13) \end{cases}$$

$$\bullet\ M_{n,1}(r) = \int_A^r s f_n(k_1 s) H_n^{(2)}(k_2 s) ds \tag{14}$$

$$\bullet\ M_{n,2}(r) = \int_r^\infty s f_n(k_1 s) H_n^{(1)}(k_2 s) ds \tag{15}$$

$$\bullet\ L_{n,\ell,1}(r) = \int_A^r s f_n(k_1 s) I_n(k_{2\ell} s) ds \tag{16}$$

$$\bullet\ L_{n,\ell,2}(r) = \int_r^\infty s f_n(k_1 s) K_n(k_{2\ell} s) ds \tag{17}$$

ここに,

$$f_n(k_1 r) = k_1^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{\left(C_{m+1} - 2C_m + C_{m-1}\right) J_{n-m}(k_1 r) H_m^{(1)}(k_1 r) + \left(D_{n,m+1} - 2D_{n,m} + D_{n,m-1}\right) H_{n-m}^{(1)}(k_1 r) H_m^{(1)}(k_1 r)\right\} \tag{18}$$

4．グリーン公式： 3次元空間内の閉曲面Sによって囲まれる閉領域内の点Pにおける速度ポテンシャルϕは，グリーンの公式により次式のように表示できる．

$$\phi(P) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\right\} d\sigma \tag{19}$$

ここに，R：点Pと境界面上の点との距離，R'：境界面上の点と，点Pの鏡像位置(底面を鏡面とする)にある点P'との距離，$d\sigma$：面積要素である．ただし，Pが境界面上にある場合，右辺の1/4πは1/2πとなる．

5．内部領域の解： 式(19)に，式(6)と式(8)を代入し，また，仮想境界面上で真田らの解を用いると，内部領域の解は式(21)のように示すことができる．

$$\begin{aligned} &\alpha \phi_2^S(x,y,z) \\ &= -\int_{S_B} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\frac{\partial \phi_2^I}{\partial n_B} dS_B - \int_{S_B} \phi_2^S(x_B, y_B, z_B)\frac{\partial}{\partial n_B}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) dS_B + \int_{S_F} 4\nu\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\phi_2^S(x_F, y_F, 0) dS_F \\ &+ \int_{S_F} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) F(x_F, y_F) dS_F - \int_{S_F} \phi_2^S(x_F, y_F, 0)\frac{\partial}{\partial Z_F}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) dS_F \\ &+ \int_{S_A} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Bigg[\tilde{Z}^{(2)}(z_A) G_n \\ &+ \sum_{\ell=0}^{\infty} Z_\ell^{(2)}(Z_A)\left\{Q_{n,\ell} + \tilde{Q}_{n,\ell}\left(P_{n,\ell} + \tilde{P}_{n,\ell}\int_0^{2\pi}\int_{-d}^{0} \phi_2^S(\xi,\eta,\zeta) Z_\ell^{(2)}(\zeta) e^{-in\theta'} d\zeta d\theta\right)\right\}\Bigg] e^{in\theta} dS_A \end{aligned} \tag{20}$$

6．計算方法： 式(20)の積分方程式を離散化し，連立一次方程式に書き直す．この方程式を解くことにより，内部領域の速度ポテンシャル，および外部領域の解析解（式(10)）中の未定係数が決まる．したがって，求めるべき2次オーダーの速度ポテンシャルが求まることになる．離散化過程では，自由表面を構造物や仮想境界と接する部分を滑らかにするために3角形要素で，また，仮想境界面を計算過程で必要な要素の高さΔzや中心からの角度$\Delta\theta$が定義しやすいよう4角形要素で分割した．また，構造物表面は今回は円柱を対象としたため，仮想境界面と同様，4角形要素で分割した．

7．おわりに： 以上，本研究では，任意形状構造物への拡張できるハイブリッド法による2次近似回折波の速度ポテンシャルの計算法の基礎式を示した．ここには基礎式のみ示したが，計算結果は講演時に発表する予定である．最後になるが，本研究は文部省科学研究費補助金の交付を受けて行われたことを付記する．

<参考文献> 1)真田・水谷・岩田(1995):大口径円筒構造物による2次近似回折波理論，土木学会中部支部研究発表会講演概要集 pp.219-220　2)R.C.MacCamy and R.A.Fuchs(1954):Wave Forces on Piles:A Diffraction Theory,U.S.ArmyCorps of Engineers,Beach Erosion Board,Tech.Memo.,No.69