実数階微分の工学への応用の試み

金沢大学工学部　正会員　石田　啓
金沢大学工学部　正会員　矢富盟祥
金沢大学大学院　　　　○楪田真也

1. はじめに

従来，応用数学の分野では整数階の微分が考えられてきたが，純粋数学の解析学の分野では実数階微分の概念が汎用されている．工学の分野では問題を簡単化するため，系に対する入力と出力から得られる周波数応答関数から線形現象を取扱っている．しかし物理現象は一般的に非線形微分方程式で表現されることが多い．そこで，実数階微分のさわりを紹介するとともに，非線形現象が重み関数を持つ分布実数階微分方程式で表現できると仮定し，実数階微分の応用について考察する．本報告では，常微分方程式に実数階微分を適用し，周波数応答関数を含んだ重み関数の積分方程式の誘導を行う．重み関数が決定すれば，非線形微分方程式で表されるシステムが，分布実数階微分方程式で表現出来ることとなり，非線形システムの新たな考察手段となることが期待される．

2. 実数階微分の導入

関数$x(t)$を次式のようにフーリエ逆変換で表示する．

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)\exp(i\omega t)d\omega \tag{1}$$

$$X(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\exp(-i\omega t)dt \tag{2}$$

なお，$X(\omega)$は$x(t)$のフーリエ変換とし，iを虚数単位とする．式(1)より，関数$x(t)$の整数階微分は次式で得られる．ただし，nを整数とする．

$$x^{(n)}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)(i\omega)^{n}\exp(i\omega t)d\omega \tag{3}$$

上式で整数nを実数αで置き換えれば，

$$x^{(\alpha)}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)(i\omega)^{\alpha}\exp(i\omega t)d\omega \tag{4}$$

となる．上式右辺が積分可能なとき，上式を関数$x(t)$の実数階微分と定義する．

3. 一般化された微分方程式

一般的に与えられた非線形常微分方程式が，次式のような重み関数を持つ分布実数階微分方程式で表現できるとする．

$$\int_{-\infty}^{\infty}p(\alpha)x^{(\alpha)}(t)d\alpha=f(t) \tag{5}$$

ただし，重み関数$p(\alpha)$はδ関数を含む一般化された超関数となる．式(4)の実数階微分を式(5)に代入し整理すると次式を得る．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}p(\alpha)\omega^{\alpha}\exp(i\frac{\pi}{2}\alpha)d\alpha\right)X(\omega)\exp(i\omega t)d\omega=f(t) \tag{6}$$

式(6)の右辺$f(t)$についても同様にフーリエ逆変換で表す．

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\exp(i\omega t)d\omega \tag{7}$$

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\exp(-i\omega t)dt \tag{8}$$

式(6)の左辺のαに関する積分について$R(\omega)$を次式で定義する

$$R(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}p(\alpha)\omega^{\alpha}\exp(i\frac{\pi}{2}\alpha)d\alpha \tag{9}$$

$R(\omega)$は周波数応答関数であり，観測結果から得られる$x(t)$および$f(t)$のフーリエ変換$X(\omega)$および$F(\omega)$を用いて次式が成り立つ.

$$F(\omega)=R(\omega)X(\omega) \tag{10}$$

したがって式(9)の左辺$R(\omega)$は既知であり，式(9)は$p(\alpha)$に関する積分方程式となるが，$p(\alpha)$は一般にδ関数を含む超関数となるため，数値的に解くことが困難である．そこで，次式のような可積分な関数$E(\alpha)$を定義する．

$$p(\alpha)=\frac{dE(\alpha)}{d\alpha} \tag{11}$$

式(11)を用いて積分方程式(9)を弱形式化すると次式を得る．

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dE(\alpha)}{d\alpha}\omega^{\alpha}\exp(i\frac{\pi}{2}\alpha)d\alpha\\&=E(\alpha)\omega^{\alpha}\exp(i\frac{\pi}{2}\alpha)\Big|_{\alpha_0}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}E(\alpha)(i\frac{\pi}{2}+\log\omega)\omega^{\alpha}\exp(i\frac{\pi}{2}\alpha)d\alpha\qquad(\omega>0)\end{aligned} \tag{12}$$

ここで，$0<\omega<1$かつ$E(\alpha)=0$，$\alpha\le\alpha_0$と仮定し，次式が成り立つと仮定した．

$$\lim_{\alpha\to-\infty}E(\alpha)\omega^{\alpha}=0 \tag{13}$$

式(12)の右辺を式(13)の仮定もとに展開すると次式を得る．

$$E(\alpha)\omega^{\alpha}\exp(i\frac{\pi}{2}\alpha)\Big|_{\alpha_0}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}E(\alpha)(i\frac{\pi}{2}+\log\omega)\omega^{\alpha}\exp(i\frac{\pi}{2}\alpha)d\alpha=R(\omega)\qquad(\omega>0) \tag{14}$$

式(14)は定義域$0<\omega<1$に注意すると次式となる．

$$-(i\frac{\pi}{2}+\log\omega)\int_{\alpha_0}^{\infty}E(\alpha)\omega^{\alpha}\exp(i\frac{\pi}{2}\alpha)d\alpha=R(\omega)\qquad(0<\omega<1) \tag{15}$$

上式は一般に可積分である$E(\alpha)$を未知関数とする積分方程式であるため，上式より（式(13)の仮定のもとで）数値解析的に$E(\alpha)$を求めることができる．

4. おわりに

系を重み関数を持つ分布実数階微分方程式で表現できると仮定した場合，その系に対する入力と出力の測定値から得られる周波数応答関数からその重み関数を決定するための可積分関数を未知関数とする積分方程式が得られた．重み関数が決定されれば，非線形微分方程式が分布実数階微分方程式で表現出来ることになり，工学的な物理系の新たな考察法が期待される．数値解析した結果については講演時に報告する予定である．

参考文献

S.G.Samko and A.A.Kilbas and O.I.Marichev : Fractional Integrals and Derivatives.