3次元ポテンシャル問題の高速多重極境界要素法による解析

福井大学工学部　学生員　○　玖津見敏広
福井大学工学部　正会員　　　福 井 卓 雄

1　はじめに

高速多重極境界要素法は高速多重極アルゴリズム [1] を利用して境界要素法の密行列方程式を極めて高速に解析する手法である。これまでに, 2次元ポテンシャル問題 [2, 3] および2次元静弾性問題 [4] に適用して, その高速性を確認してきた。これらの問題においては, 通常のワークステーションを用いても50万元程度の問題を1〜2時間程度で実行している。ここでは, この手法を3次元のポテンシャル問題に適用する。

2　3次元ポテンシャル問題の境界要素法

3次元空間中の領域 B とその境界 ∂B を考える。関数 u が領域内で Laplace 方程式を満足し, 境界上で与えられた境界条件を満足するとする。境界値問題は次のようになる。

$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{in } B, \qquad u = \hat{u} \quad \text{on } \partial B_1, \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = \hat{s} \quad \text{on } \partial B_2 \tag{1}$$

Laplace 方程式の基本特異解はよく知られた Newton ポテンシャルであり, 第2基本特異解はその法線微分により次のように与えられる。

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}, \qquad S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{\partial G}{\partial n_y}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2}\frac{\partial|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}{\partial n_y} \tag{2}$$

Green の公式により, 境界積分方程式は次のようになる。

$$C(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial B} G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\frac{\partial u}{\partial n}(\boldsymbol{y})\,dS_y - \int_{\partial B} S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})u(\boldsymbol{y})\,dS_y \tag{3}$$

ここに, C は点 $\boldsymbol{x}$ の位置に依存するパラメータで, $\boldsymbol{x}$ が領域内のとき $C=1$, 領域外のとき $C=0$, 滑らかな境界上にあるとき $C=1/2$ の値をとる。

境界値に適当な近似を導入して式 (3) を離散化し, 与えられた境界値に対し未知の境界値を決定して, 関数 u を近似的に決定する方法が境界要素法である。

3　高速多重極境界要素法

境界要素法における一つの問題点は, 式 (3) の離散化により得られる線形方程式の係数が密行列となることである。このために, 問題の自由度を N とすると, 記憶容量は $O(N^2)$, 計算量は $O(N^2)$〜$O(N^3)$ となって, これまでの直接的な方法では大規模な問題を解析することが困難であった。この困難を回避する一つの方法が高速多重極境界要素法である。

式 (3) の右辺の積分は, それぞれ, 境界上に分布した密度 $\partial u/\partial n$ および二重層密度 u による $\boldsymbol{x}$ 点のポテンシャルを表している。このような多数の質点 (ここでは要素) によるポテンシャルあるいはその勾配を評価する操作は N 体問題において一般的な操作である。N 体問題においてはこの計算を高速化する手法がいろいろと工夫されており, 高速多重極アルゴリズムはその一つである。右辺の積分を高速多重極アルゴリズムを用いて高速に評価し, 方程式を繰り返し法で解けば, 極めて高速に密行列方程式を解くことができる。また, このアルゴリズムでは係数行列を保持する必要がないので, 必要な記憶容量も圧倒的に縮小できる。これが高速多重極境界要素法である。これまでの研究成果によると, この方法の記憶容量および計算量は $O(N)$ である。

4 高速多重極アルゴリズム

高速多重極アルゴリズムは，あるグループに含まれる要素による遠方の点への影響は，そのグループの近傍におかれた多重極により表現できる，という事実に基づいている。グループにたくさんの要素が含まれていて，その数が展開の項数よりもはるかに大きければ，多重極展開を使えば計算を大幅に省略できるという訳である。

アルゴリズムを構成するにはまず基本解の多重極展開が必要である。いまの場合には基本解は Newton ポテンシャルであるので，$\boldsymbol{x}=(r,\theta,\phi)$, $\boldsymbol{y}=(\rho,\alpha,\beta)$ とすると，その多重極展開は次のようになる。

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\frac{M_n^m}{r^{n+1}}Y_n^m(\theta,\phi),\qquad M_n^m=\rho^n Y_n^{-m}(\alpha,\beta) \tag{4}$$

ここに，球関数 $Y_n^m(\theta,\phi)$ は Legendre の陪関数を用いて，

$$Y_n^m(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{(2n+1)}{4\pi}\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}}\,P_n^{|m|}(\cos\theta)e^{im\phi} \tag{5}$$

で表される。M_n^m は多重極展開の係数で，第 2 基本特異解の場合の係数は，式 (2) により，M_n^m の法線導関数をとれば得られる。

ポテンシャル値の評価の計算は次のように行なう。まず，領域全体を含む立方体を考え，これを順次 8 等分したセルを作ることにより，境界要素の集合を 8 分木で構造化する。すべての計算はこの木の構造の上で行なわれる。計算は三段階に分かれる。第一段階はすべてのセルについて個々のセルに含まれるすべての要素からの効果を多重極展開する。計算は葉からはじめて順次親のセルに多重極の係数を引き渡す形で行なう。第二段階は遠方のセルからの影響を各要素が含まれるセルの中心に関する局所展開として計算し，それを使って求める点のポテンシャル値を計算する。計算は根からはじめて順次子のセルに局所展開の係数を引き渡す形で行なう。最後に第三段階として，近傍の要素からの影響を直接に計算する。

上の計算過程を実行するためには，以下のような係数の変換が必要である。第一段階では，式 (4) により求めた多重極係数を親のセルに引き渡すために，多重極点の移動による係数の変換

$$\tilde{M}_j^k=\sum_{n=0}^{j}\sum_{m=-n}^{n}\frac{i^{|k|-|m|-|k-m|}A_n^m A_{j-n}^{k-m}\rho^n Y_n^{-m}(\alpha,\beta)}{A_j^k}M_{j-n}^{k-m},\qquad A_n^m=\frac{(-1)^n}{\sqrt{(n-m)!(n+m)!}} \tag{6}$$

を行なう。第二段階では，ポテンシャルをセルの中心に関する局所展開

$$u(\boldsymbol{x})=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=-j}^{j}L_j^k Y_j^k(\theta,\phi)r^j \tag{7}$$

で表現する。したがって，多重極係数から局所展開の係数への変換

$$L_j^k=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\frac{i^{|k-m|-|k|-|m|}A_n^m A_j^k Y_{j+n}^{m-k}(\alpha,\beta)}{(-1)^n A_{j+n}^{m-k}\rho^{j+n+1}}M_n^m \tag{8}$$

が行なわれる。さらに，親のセルに関する展開を子のセルに引き渡すために，局所展開の中心を移動することによる係数の変換

$$\tilde{L}_j^k=\sum_{n=j}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\frac{i^{|m|-|m-k|-|k|}A_{n-j}^{m-k}A_j^k Y_{n-j}^{m-k}(\alpha,\beta)\rho^{n-j}}{(-1)^{n+j}A_n^m}L_n^m \tag{9}$$

が必要となる。これらの変換を用いて多数の点におけるポテンシャル値を効率良く計算することができる。

詳細な解析結果については当日報告する。

参考文献

[1] Greengard, L.: A short cource on fast multipole methods. *Lecture Notes, VIIth EPSRC Numerical Analysis Summer School, Leicester University, U.K., 8th-19th July*, 1996.

[2] 福井卓雄, 服部純一: 高速多重極境界要素法における要素積分の評価法, ＢＥＭ・テクノロジー・コンファレンス論文集, 第 6 巻, pp. 51-56, 1996.

[3] 福井卓雄, 服部純一, 土居野優: 高速多重極法の境界要素解析への応用, 構造工学論文集, Vol. 43A, 1997 (印刷中).

[4] 福井卓雄, 持田哲郎: 高速多重極境界要素法の 2 次元静弾性問題への応用, 境界要素法論文集, 第 13 巻, pp. 131-136, 1996.