Helmholtz 方程式の高速多重極境界要素法による解析

福井大学工学部　学生員　○　勝本 順三
福井大学工学部　正会員　　　福井 卓雄

1　はじめに

境界要素法における一つの問題点は, 離散化により導かれる線形代数方程式の係数が密行列となることである。このため, 従来の直接的な解法では, 大規模な問題においては記憶容量・計算量ともに極めて大きくなって, 解析を実行することが困難であった。著者らは, この困難を回避する方法として, 高速多重極法 [1] を利用した高速多重極境界要素法 [2] を提案してきた。ここでは, この手法を 2 次元の Helmholtz 方程式の境界値問題に適用する。

2　Helmholtz 方程式の境界要素法

2 次元空間中の領域 B とその境界 ∂B を考える。関数 u が領域内で Helmholtz 方程式を満足し, 境界上で与えられた境界条件を満足するとする。境界値問題は次のようになる。

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \quad \text{in } B, \qquad u = \hat{u} \quad \text{on } \partial B_1, \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = \hat{s} \quad \text{on } \partial B_2 \tag{1}$$

ここに, k は波数である。Helmholtz 方程式の基本特異解および第 2 基本特異解は次のように与えられる。

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{i}{4}\mathrm{H}_0^{(1)}(k|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|), \qquad S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{\partial G}{\partial n_y}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -\frac{ik}{4}\frac{\partial|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}{\partial n_y}\mathrm{H}_1^{(1)}(k|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|) \tag{2}$$

ここに, $\mathrm{H}_n^{(1)}$ は第 1 種 n-次の Hankel 関数である。一般化された Green の公式により, 境界積分方程式は

$$C(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial B} G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\frac{\partial u}{\partial n}(\boldsymbol{y})\,dS_y - \int_{\partial B} S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})u(\boldsymbol{y})\,dS_y \tag{3}$$

となる。ここに, C は点 $\boldsymbol{x}$ の位置に依存するパラメータで, $\boldsymbol{x}$ が領域内のとき $C = 1$, 領域外のとき $C = 0$, 滑らかな境界上にあるとき $C = 1/2$ の値をとる。境界値に適当な近似を導入して式 (3) を離散化し, 与えられた境界値に対し未知の境界値を決定して, 関数 u を近似的に決定する方法が境界要素法である。

式 (3) の離散化により導かれる線形代数方程式の係数は密行列である。直接にこれを解くと, 問題の自由度 N に対して, 係数行列の記憶容量は $O(N^2)$, 方程式を解くための計算量は $O(N^2)$〜$O(N^3)$ となる。これらの計算コストを大幅に縮小しようとする方法が高速多重極境界要素法である。

3　基本解の多重極展開

計算を高速化するために, 式 (3) の右辺の積分を多重極展開を使って評価する。この目的のために, 基本特異解の多重極展開を導入しよう。

図-1に示すように, 二点 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して, $\boldsymbol{y}$ の近くに $\boldsymbol{y}_0$ をとり。$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}_0$ および $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0$ の極座標表現を, それぞれ, (r,θ), (ρ,ϕ) としよう。$r > \rho$ であるとき, Graf の加法定理により, $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$ を変数とする Hankel 関数を r を変数とする Hankel 関数の級数として展開することができる。

$$\mathrm{H}_n^{(1)}\left(\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos\alpha}\right) = e^{-in\beta}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{H}_{n+m}^{(1)}(r)\mathrm{J}_m(\rho)e^{im\alpha} \tag{4}$$

ここに, $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| = \sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos\alpha}$ であり, J_n は n-次の Bessel 関数である。角 α は $\alpha=\theta-\phi$, 角 β は

$$\rho\sin\alpha = \sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos\alpha}\ \sin\beta, \qquad r-\rho\cos\alpha = \sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos\alpha}\ \cos\beta$$

により定まる (図-1)。

基本特異解 (2) を 式 (4) を用いて展開すると

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{i}{4}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{H}_n^{(1)}(kr)\mathrm{J}_n(k\rho)e^{in(\theta-\phi)} \tag{5}$$

が得られる。一般に

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{i}{4}\sum_{n=-\infty}^{\infty}M_n\mathrm{H}_n^{(1)}(kr)e^{in\theta} \tag{6}$$

を波動場 u の多重極展開という。M_n は多重極展開の係数で, 基本特異解 (5) の場合には $M_n=\mathrm{J}_n(k\rho)e^{-in\phi}$ となっている。第 2 基本特異解の係数は, 式 (2) により, M_n の法線導関数をとれば得られる。Hankel 関数の漸近表示 $\mathrm{H}_n^{(1)}(kr)\sim\sqrt{2/\pi kr}e^{i(kr-(2n+1)\pi/4)}$ を考慮すれば, $kr\gg 1$ のとき, 式 (6) は

$$u(\boldsymbol{x}) \sim \frac{i}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}e^{i(kr-\pi/4)}\sum_{n=-\infty}^{\infty}M_ne^{in(\theta-\pi/2)}$$

となり, 多重極展開は無限遠方では Fourier 級数として表現されることがわかる。

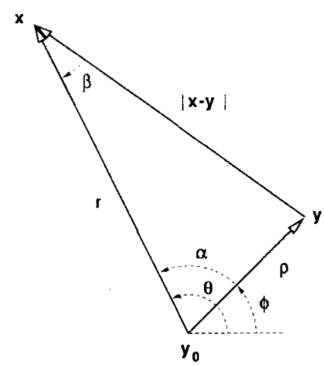

図-1 多重極点

さらに, 式 (4) を (6) に適用すれば, 多重極点の移動による係数の変換関係は次のようになる。

$$\tilde{M}_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty}M_m\mathrm{J}_{n-m}(k\rho)e^{-i(n-m)\phi} \tag{7}$$

4 ポテンシャル評価の方法

多重極展開 (6) を用いれば, 多重極点 $\boldsymbol{y}_0$ の近傍の波源からの影響は一つの多重極展開で表現することができる。もし, 展開の計算を有限項 $\pm p$ で打ち切っても計算に必要な精度は保持されるとすると, $2p+1$ よりも多くの波源からの影響を計算する場合には多重極展開を用いた方が有利となる。この考えを式 (3) の右辺の積分の評価に導入し, 積分の計算を高速化して, 適当な繰り返し解法を使って方程式を解けば, 境界要素法を高速化できる。

積分評価の計算は Barnes と Hut のアルゴリズム [3] に基づいて行なう。まず, 領域全体を含む正方形を考え, これを順次 4 等分したセルを作ることにより, 境界要素の集合を 4 分木で構造化する。すべての計算はこの木の構造の上で行なわれる。計算は三段階に分かれる。第一段階はすべてのセルについて個々のセルに含まれるすべての要素からの効果を多重極展開で表現する。計算は葉からはじめて順次親のセルに多重極の係数を引き渡す形で行なう。係数の引き渡しには式 (7) を使う。第二段階は遠方のセルからの影響を各要素 (あるいは値を求めるべき点) ごとに計算する。計算は根からはじめて, 順次, 遠方のできるだけ大きなセルからの影響を多重極展開 (6) を使って評価する。最後に第三段階として, 近傍の要素からの影響を直接に計算する。この方法の記憶容量は $O(N)$, 計算量は $O(N\log N)$ である。

詳細な解析結果については当日報告する。

参考文献

[1] Greengard, L.: A short cource on fast multipole methods, *Lecture Notes, VIIth EPSRC Numerical Analysis Summer School, Leicester University, U.K., 8th-19th July*, 1996.

[2] 福井卓雄, 服部純一, 土居野優: 高速多重極法の境界要素解析への応用, 構造工学論文集, Vol. 43A, 1997 (印刷中).

[3] Barnes, J. and P. Hut : A hierarchical $O(N\log N)$ force-calculation algorithm, *Nature*, **324(4)**, pp. 446–449, 1986.