2次元静弾性問題の高速多重極境界要素法による解析

福井大学大学院　学生員　○　持田哲郎
福井大学工学部　正会員　　　福井卓雄

1　はじめに

境界要素法の問題点の一つは, 離散化後の代数方程式が密行列の係数を持つことであり, 問題の自由度が上がると方程式を解くのに膨大な計算を必要とすることである。この問題点を解決する手段として, N 体問題の解析に用いられている高速多重極アルゴリズム [1] を使って行列ベクトル積を高速に計算し, 繰り返し解法により代数方程式を解いて必要とする計算量および記憶容量を圧倒的に減少させようとする方法が高速多重極境界要素法である [2, 3]。

本研究では, 2 次元静弾性問題の高速多重極境界要素法の定式化において, 境界積分方程式および境界要素法については通常の実数関数としての定式化を行ない, 多重極展開とその局所展開には複素解析関数の表現を用いる方法をとった [4]。こうすることにより, 従来からの境界要素法との適合性をとりながら, かつ高速多重極アルゴリズムの導入が容易になる。最後に, 多数の空孔が分布する無限領域の解析を行ない, この方法の効果と適用性について検討した。

2　2次元静弾性問題における境界要素法

ここでは等方等質の線形弾性体をあつかい, 物体力は考慮しない。2 次元静弾性問題の基礎式は Navier の方程式 [5] により次のように与えられる。

$$G\left(u_{i,jj}+\frac{2}{\kappa-1}u_{j,ji}\right)=0 \qquad (1)$$

ここに, u_i は変位。G はせん断弾性係数, κ は Poisson 比 ν により決まるパラメータで, 平面ひずみのとき $\kappa=3-4\nu$, 平面応力のとき $\kappa=(3-\nu)/(1+\nu)$ である。

領域 B およびその境界 ∂B における境界値問題は, 領域 B の内部で方程式 (1) を満足する変位 u_i を ∂B 上で与えられた境界条件 $u_i=\hat{u}_i$ または $n_j\sigma_{ij}=\hat{s}_i$ のもとで求める問題となる。n_i は境界の単位外向き法線ベクトルである。

3　高速多重極境界要素法

N 個の要素が存在するとき, それらの要素による弾性ポテンシャル (変位・応力) の値を各要素の上におかれた選点の上で求める問題を考える。直接的にこの計算を行なえば, $O(N^2)$ の計算が必要であるが, 高速多重極アルゴリズムを用いれば, これを $O(N)$ の計算で処理することが出来る。

高速多重極アルゴリズムを実行するためには, その計算過程 [1]〜[5] (図 1) において, 積分方程式の核である基本特異解, 第二基本特異解に対応した多重極展開の係数, 局所展開の係数およびそれらの変換を計算する必要がある。2 次元静弾性問題におけるこれらの関係を表現するために, ここでは複素弾性論 [5] の知識を利用した。

二つの解析関数 ϕ および χ を用いて基本特異解を表現すると,

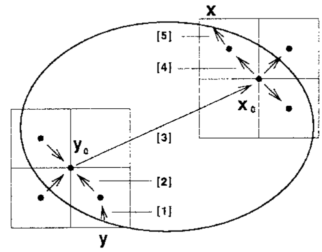
$$\phi(z)=-\frac{P}{4\pi(\kappa+1)}\log z, \qquad \chi(z)=\frac{\kappa\overline{P}}{4\pi(\kappa+1)}z\log z \qquad (2)$$

となる。ここに, $P=P_1+iP_2$ は点 $\boldsymbol{y}$ に作用する集中力を表す。また, 変位あるいは応力を求めるべき点が多重極点から十分に離れている場合には, 複素ポテンシャルを求めるべき点の近傍で Taylor 展開して,

$$\phi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}K_n z^n, \quad \chi(z)=\sum_{n=1}^{\infty}L_n z^n \qquad (3)$$

を用いてこれらの量を計算することができる。

(2), (3) を用い計算過程に従ってそれぞれ, 要素の効果をセルの中心点について多重極展開 (過程 [1]), 多重極点の移動にともなう係数の変換 (過程 [2]), 多重極点から Taylor 展開への係数の変換 (過程 [3]), Taylor 展開の中心移動のための係数の変換 (過程 [4]), 変位および応力の Taylor 展開表現 (過程 [5]) を計算し多重極表現したものを高速多重極境界要素法に用いる。



図–1 Computing process of the displacement or stress at **x** by the force or displacement gap at **y** in the fast multipole algorithm

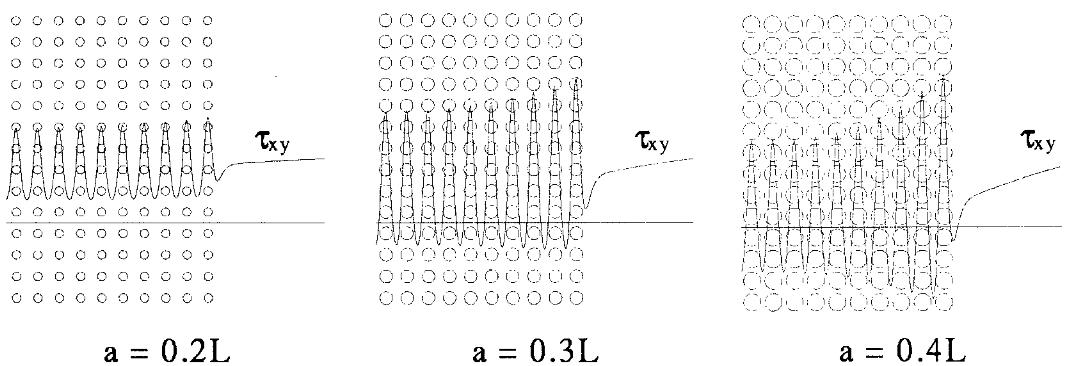
4 多数の空孔が分布する領域の解析

大きな自由度の問題があつかえる高速多重極境界要素法の応用例として, ここでは, 多数の空孔が存在する無限領域の解析を行なってみた。

無限領域中に縦横一定のピッチ L で空孔が格子状に配列されているとする。ここでは, 空孔は 20×20 に配列されているとした。一つの空孔を 48 要素で近似した場合, 全要素数は 19,200 で自由度は 38,400 である。方程式を解くための繰り返し回数は 10〜15 回程度で, 全体の計算時間は 25〜40 分程度であった。一般に, 応力集中の程度が高く, 解となる境界値の変動が大きいほど, 繰り返し回数が増加する傾向にある。また, 30×30 の問題では自由度が 86,400 になるが, この場合でも 1 時間程度で解けている。

図 2は無限遠にせん断応力 $\tau_{xy}=\tau_0$ を作用させた場合の対称軸上のせん断応力成分の分布を示す。円孔列の内部に入るほど応力の値が小さくなっている様子が見られ, これは円孔群全体が一つの空洞として挙動しているためであると考えられる。

また, 大きな円孔の周辺に多数の小さな空孔が分布している領域の解析も行った。詳細は当日報告する。



図–2 Shearing stress in an array of 20 × 20 circular cavities

参考文献

[1] Greengard, L. and V. Rokhlin : A fast algorithm for particle simulations, *J. Comp. Phys.*, **73** (1987) pp. 325–348.

[2] 福井卓雄, 服部純一 : 多重極展開法による境界要素解析の効率化, 計算工学講演会論文集, **1** (1996) pp. 319–322.

[3] 福井卓雄, 服部純一 : 高速多重極境界要素法における要素積分の評価法, BEM・テクノロジー・コンファレンス論文集, **6** (1996) pp. 51–56.

[4] 福井卓雄, 持田哲郎 : 高速多重極境界要素法の 2 次元静弾性問題への応用, 境界要素法論文集, **13** (1996) pp. 131–136.

[5] Green, A.E. and W. Zerna : *Theoretical Elasticity*, 2nd ed. Oxford (1968).