

粘弾性面内波動問題の時間領域境界要素法及び解析例

福井大学大学院 学生員 ○ 井上耕一

福井大学工学部 正会員 福井卓雄

1 はじめに

粘弾性体の面内波動問題を時間領域境界要素法を用いて解析する。この研究の問題点は、基本特異解が解析的に得られない時間領域問題において、いかにして境界要素法を構成するかにある。そこで著者らは、対応する周波数領域に着目し、その基本解を数値的に Fourier 逆変換することによって時間領域の基本特異解を高精度で計算することに成功している [1]。ここでは、その数値的手法と解析例を紹介する。

2 粘弾性面内波動問題

媒質は等方等質の線形粘弾性体であるとする。 ρ は媒質の質量密度、 $K(t)$ 、 $G(t)$ は体積変形およびせん断に対する緩和関数である。緩和関数は不遡及の公理 $K(t), G(t) = 0, -\infty < t < 0$ を満足するものとする。線形粘弾性面内波動問題の 2 次元領域 B およびその境界 ∂B における初期値境界値問題は、変位を $\mathbf{u}$ 、応力を $\boldsymbol{\sigma}$ 境界 ∂B 上の単位法線ベクトルを $\mathbf{n}$ として、つぎのように書ける。

$$G * d(\nabla^2 \mathbf{u}) + \left(K + \frac{G}{3}\right) * d(\nabla \nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{X} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad \text{in } B, 0 < t < \infty \quad (1)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \quad \text{in } B, t = 0 \quad (2)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \quad \text{on } \partial B_u, 0 < t < \infty, \quad \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{s}}(\mathbf{x}, t) \quad \text{on } \partial B_s, 0 < t < \infty \quad (3)$$

3 時間領域境界要素法の定式化

境界要素法を定式化するためには、まず、基礎方程式の基本特異解が解析的に閉じた形で得られることが必要である。一般的な線形粘弾性モデルに対しては基本特異解がこのような形では得られないが、ここでは、仮に基本特異解 $\mathbf{G}(\mathbf{x}; \mathbf{y}|t)$ が与えられており、その(超)関数的な特性は弾性体のそれと同等なものと仮定する。

境界積分方程式 波動方程式 (1) に対し、一般化された Love の公式から次のような解が境界上で与えられる。

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + \int_{\partial B} [\mathbf{G}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) * \mathbf{s}(\mathbf{y}) - \mathbf{S}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) * \mathbf{u}(\mathbf{y})] ds_y \quad (4)$$

$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ は入射波の項を表し、 $\mathbf{C}$ は $\mathbf{x}$ の位置によって決まる係数で、境界 ∂B が滑らかであると仮定すると、 $\mathbf{x} \in B$ のとき $\mathbf{I}$ 、 $\mathbf{x} \in \partial B$ のとき $\mathbf{I}/2$ 、それ以外のとき $\mathbf{0}$ の値をとる ($\mathbf{I}$ は恒等テンソル)。第二基本特異解 $\mathbf{S}(\mathbf{x}; \mathbf{y}|t)$ は基本特異解 $\mathbf{G}(\mathbf{x}; \mathbf{y}|t)$ の第 1 成分を変位と見たとき $\mathbf{S}(\mathbf{x}; \mathbf{y}|t) = (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Sigma}[\mathbf{G}(\mathbf{y}; \mathbf{x}|t)])^T$ で定義される。以上より、(4) は $\mathbf{x}$ が境界 ∂B 上にあるとき、境界関数 $\mathbf{u}$ 、 $\mathbf{s}$ の間に成立すべき条件を与え、境界上でこのどちらかの関数が与えられれば未知の関数に関する積分方程式となる。

境界要素法を導くために、積分公式 (4) における境界上の関数 $\mathbf{u}$ 、 $\mathbf{s}$ に適当な近似を導入する。いま、

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_m \sum_K \phi_m(\mathbf{x}) \psi_K^u(t) \mathbf{u}_m^K \quad \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) = \sum_m \sum_K \phi_m(\mathbf{x}) \psi_K^s(t) \mathbf{s}_m^K \quad (5)$$

と表し、(4) に代入すると、式の右辺は離散化されて、以下のようにになる。

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \simeq \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + \sum_m \sum_K \left(\mathbf{A}_{mK}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{s}_m^K - \mathbf{B}_{mK}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}_m^K \right) \quad (6)$$

$$\text{ここに、} \quad \mathbf{A}_{mK}(\mathbf{x}, t) = \int_{\partial B} [\mathbf{G}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) * \psi_K^s] \phi_m(\mathbf{y}) ds_y \quad \mathbf{B}_{mK}(\mathbf{x}, t) = \int_{\partial B} [\mathbf{S}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) * \psi_K^u] \phi_m(\mathbf{y}) ds_y \quad (7)$$

4 影響関数の計算法

波動方程式 (1) を $f^*(\omega) = \mathcal{F}[f] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t} dt$ により Fourier 変換すると

$$G^* \nabla^2 \mathbf{u}^* + \left(K^* + \frac{G^*}{3} \right) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}^* = -\rho \omega^2 \mathbf{u}^* \quad (8)$$

を得る。ここに、 $G^* = -i\omega \mathcal{F}[G]$, $K^* = -i\omega \mathcal{F}[K]$ は複素弾性係数である。(8) の基本特異解を以下に示す。

$$G^*(\mathbf{x}; \mathbf{y} | \omega) = \frac{i}{4G^*} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{I} \\ \nabla_r \nabla_r \end{array} \right\}^T \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \kappa^2 H_0^{(1)}(k_L r) \\ H_0^{(1)}(k_T r) \\ -\frac{\kappa^2}{k_L r} H_1^{(1)}(k_L r) + \frac{1}{k_T r} H_1^{(1)}(k_T r) \end{array} \right\} \quad (9)$$

ここに $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, 縦波, 横波の複素波数 k_L, k_T は位相速度 $c_L = \sqrt{(K^* + 4/3 G^*)/\rho}$, $c_T = \sqrt{G^*/\rho}$ により $k_L = \omega/c_L$, $k_T = \omega/c_T$ で与えられる。 $\kappa = k_L/k_T$ は縦波と横波の比でポアソン比により決定される。

周波数領域の基本解 G^* は時間領域の基本解の Fourier 変換 $G^*(\mathbf{x}; \mathbf{y} | \omega) = \mathcal{F}[G(\mathbf{x}; \mathbf{y} | t)]$ であるから, 時間領域の基本解 G は Fourier 逆変換により得ることができる。結局, (6) の影響関数 (7) は周波数領域の基本解を用い $G(\mathbf{x}; \mathbf{y}) * \psi_K^s = \mathcal{F}^{-1}[G^*(\mathbf{x}; \mathbf{y}) \mathcal{F}[\psi_K^s]]$, $S(\mathbf{x}; \mathbf{y}) * \psi_K^u = \mathcal{F}^{-1}[S^*(\mathbf{x}; \mathbf{y}) \mathcal{F}[\psi_K^u]]$ と表される。

5 解析例 (円形空洞による面内波動の散乱問題)

以上の方法で, 無限粘弾性体中に存在する円形空洞に縦波が入射したときの散乱を解析した。ここでは, Ricker のウェーブレットを粘弾性体用に修正したものを入射波とした。粘弾性モデルは標準線形三要素モデルで, せん断弾性係数にだけ粘弾性的性質を持たせている。緩和せん断弾性係数と初期せん断弾性係数との比を $G_R/G_0 = 1/2$, 体積弾性係数を $K/G_0 = 1$ としている。応力緩和時間は $\tau_\sigma = T_0, 10T_0$ とし, 比較するために弾性解もプロットしている。Fig.1 にその入射方向変位, 周方向の応力を示す。応力緩和時間が大きいほど粘性の効果が現れにくく, その挙動は弾性体に近くなる。また, 空洞の入射前面の裏側では粘性の効果が強く現れ, 解析時間が増えるにつれその粘弾性的性質は如実に現れてくる。

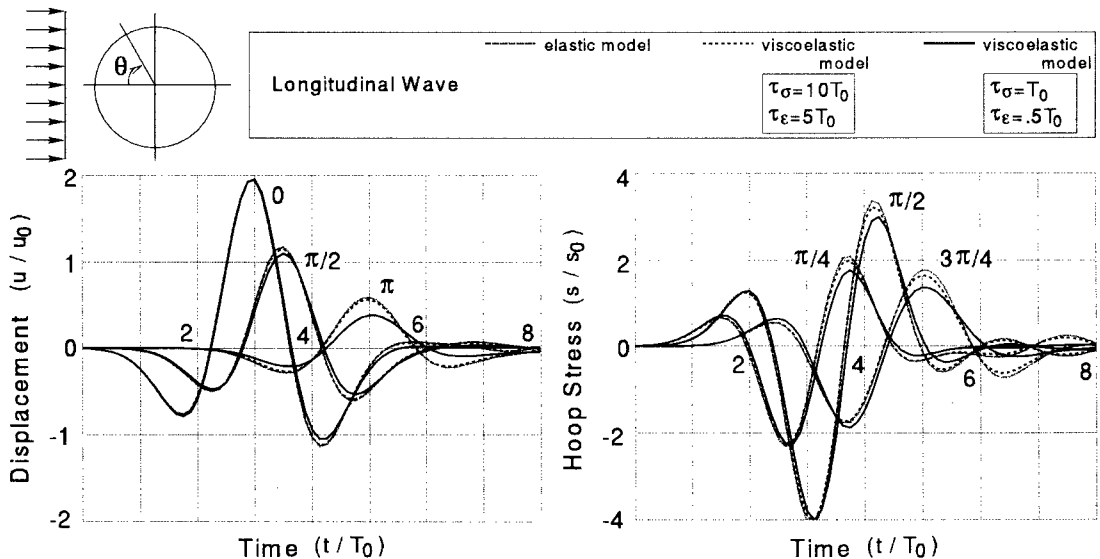


Fig.1 Displacement and Hoop Stress around a cavity, case longitudinal wave

参考文献

- [1] 福井卓雄, 船戸慶輔, 井上耕一: 粘弾性面内波動問題の時間領域境界要素法, BEM・テクノロジー・コンファレンス論文集, 第6巻, pp.1-6, 1996.