

スプライン帯板法を用いた変厚扇形 Mindlin板の振動解析

大同工業大学

○ 近藤八重

大同工業大学

正会員

水澤富作

1. はじめに

最近、橋梁構造の省力化を図る目的で板厚変化をつけた平板が使用されており、鋼重の低減や工期の短縮がはかられている。これまでも、変厚を有する薄板の曲げ、振動や座屈解析が多く報告されているが、比較的厚い変厚板の研究は少ないように思われる。水澤ら¹⁾は、薄板理論に基づくスプライン要素法とスプライン帯板法を用いて、変厚扇形板振動解析を行っている。しかしながら、長方形厚板と比較して扇形厚板の研究²⁾は少なく、また変厚を持つ扇形厚板の研究は報告されていないようである。

本文では、スプライン帯板法を用いて、Fig. 1に示すような半径方向に変厚な扇形Mindlin板の振動解析を行い、本手法の収束性や解析精度について検討している。また、このような扇形板の振動特性に与える幅厚比 B/hi 、変厚比 δ 、中心角 ϕ や境界条件などの影響について明らかにしている。

2. 解析手法

ここでは、Mindlin板理論に基づくスプライン帯板法を用いて式の定式化を行う。式の定式化にあたり、次式で示す無次元化された極座標を用いている。 $\xi = \theta / \phi$, $\eta = (r - Ri) / B$, $W' = W / B \cdots (1)$ ただし、 ϕ は中心角、 $B = Ro - Ri$ であり、 Ro と Ri は外径と内径である。また、スプライン帯板要素で仮定する変位関数は、スプライン関数 N_n , $k(\eta)$ と固有関数 $Y_m(\xi)$ を用いて次式で仮定する。

$$\begin{aligned} \phi_\theta(\xi, \eta) &= \sum_{m=1}^r \sum_{n=1}^{i_r} A_{nm} N_n, k(\eta) \bar{Y}_m(\xi) = \sum_{m=1}^r [N] \bar{Y}_m(\xi) \{\delta_A\} \\ \phi_r(\xi, \eta) &= \sum_{m=1}^r \sum_{n=1}^{i_r} B_{nm} N_n, k(\eta) Y_m(\xi) = \sum_{m=1}^r [N] Y_m(\xi) \{\delta_B\} \\ W'(\xi, \eta) &= \sum_{m=1}^r \sum_{n=1}^{i_r} C_{nm} N_n, k(\eta) Y_m(\xi) = \sum_{m=1}^r [N] Y_m(\xi) \{\delta_C\} \end{aligned} \quad \cdots (2)$$

ここで、 r は級数の項数、 $i_r = k + Mr - 2$ 、 $k-1$ はスプライン次数、

Mr は帯板要素の分割数である。また、板厚、 $h(\eta)$ は図-1に示すように半径方向に線形的に変化するものと仮定し、 $h(\eta) = hi(\delta\eta + 1)$ で表す。ここで、 δ は変厚比であり、 $\delta = (ho - hi) / hi$ で与えられる。したがって、変厚扇形Mindlin板のひずみエネルギー U と運動エネルギー T は、それぞれ次式で与えられる。

$$\begin{aligned} U &= (Do\phi/2) \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \left(\frac{1}{\phi/\eta} \right) \cdot \left(\frac{\partial \phi_\theta}{\partial \xi} \right) + \left(\phi_r / \eta \right) \right\}^2 + \nu \left(\frac{\partial \phi_r}{\partial \eta} \right)^2 \\ &\quad + 2\nu \left\{ \left(\frac{1}{\phi/\eta} \right) \left(\frac{\partial \phi_\theta}{\partial \xi} \right) + \left(\phi_r / \eta \right) \right\} \left(\frac{\partial \phi_r}{\partial \eta} \right) \\ &\quad + 0.5(1-\nu) \left\{ \left(\frac{\partial \phi_\theta}{\partial \eta} \right) + \left(\frac{1}{\phi/\eta} \right) \left(\frac{\partial \phi_r}{\partial \xi} \right) - \left(\phi_\theta / \eta \right) \right\}^2 \\ &\quad + 6(1-\nu) \kappa (B/hi)^2 / (\delta\eta + 1)^2 \left[\left\{ \left(\frac{1}{\phi/\eta} \right) \left(\frac{\partial W'}{\partial \xi} \right) + \phi_\theta \right\}^2 \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \left(\frac{\partial W'}{\partial \eta} \right) + \phi_r \right\}^2 \right] \cdot (\delta\eta + 1)^3 \cdot A d\xi d\eta \quad \cdots (3) \end{aligned}$$

$$T = (\rho hi\phi/2) \omega^2 B^2 \int_0^1 \int_0^1 \left\{ W'^2 + (1/12)(hi/B)^2 (\delta\eta + 1)^2 (\phi_\theta^2 + \phi_r^2) \right\} (\delta\eta + 1) \cdot A d\xi d\eta \quad \cdots (4)$$

ここで、 $A = (\eta + Ri/B) = \{\eta + 1/(\mu - 1)\}$, $\mu = Ro/Ri$ 。 κ はせん断修正係数($=5/6$)、 ν はPoisson比、 ρ は密度、 $Do = Ehi^3/12(1-\nu^2)$, ω は円振動数(rad/sec.)である。また、円弧辺での境界条件は、仮想バネ法を適用して導入している。従って、変厚扇形Mindlin板の全ポテンシャルエネルギーを極値化すれば、固有方程式が求められる。

3. 数値計算例及び考察

ここでは、スプライン帯板法を用いて、半径方向の2辺が単純支持され、他の2つの円弧辺で任意の境界条件を持つ変厚扇形Mindlin板の振動解析を行っている。

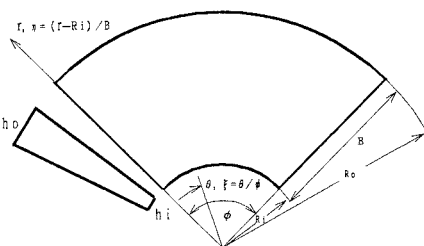


Fig. 1. Annular sector Mindlin plate of tapered thickness and coordinate systems

Table-1には、相対する2つの円弧辺で固定された変厚扇形板($\delta=1.0$, $Ro/Ri=2.0$, $\phi=60^\circ$)の振動数パラメータ, $n^* = B^2 \omega \sqrt{\rho h i / Do}$ の収束性に与える帯板要素の分割数, Mr の影響が示されている。ここで、 B/hi は5, 10と1000に仮定している。これより、安定した収束性が得られている。またTable-2には、周辺単純支持された変厚扇形板($\delta=1.0$, $Ro/Ri=2.0$)の振動数パラメータに与える幅厚比と中心角の影響が示してある。精度比較のために、Spline要素法¹⁾で求めた値も示してある。これより、薄い場合の値は薄板理論に基づくSpline要素法の解と一致した結果が得られている。また、幅厚比が減少すると、横せん断変形の影響が大き

Table 1. The effect of the number of strips, Mr on the convergence of natural frequency parameters, $n^* = \omega B^2 \sqrt{(\rho h i / Do)}$ of annular sector Mindlin plates of tapered thickness: $\delta=1.0$, $Ro/Ri=2.0$, $\phi=60^\circ$, $\nu=0.3$, $k=1=5$ and C-C

B/hi	Mr	Modes				
		1st	2nd	3rd	4th	5th
5	2	23.99	32.53	46.44	47.97	55.08
	4	23.98	32.53	46.44	47.96	55.07
	8	23.98	32.53	46.44	47.96	55.07
	12	23.98	32.53	46.44	47.96	55.07
10	2	31.71	43.31	64.13	71.68	81.93
	4	31.70	43.29	64.11	71.63	81.90
	8	31.70	43.29	64.11	71.63	81.89
	12	31.70	43.29	64.11	71.63	81.89
1000	2	38.14	53.39	80.69	115.0	120.4
	4	37.07	51.60	79.28	99.75	114.2
	8	36.93	51.43	79.10	95.23	110.6
	12	36.93	51.42	79.09	95.21	110.6

Table 2. Accuracy comparison of frequency parameters, $n^* = \omega B^2 \sqrt{(\rho h i / Do)}$ of annular sector thin plates of tapered thickness: $\delta=1.0$, $Ro/Ri=2.0$, $\nu=0.3$, $k=1=5$ and $Mr=12$

Boundary conditions	ϕ	B/hi	Modes				
			1st	2nd	3rd	4th	5th
S-S		5	29.23	51.75	61.64	78.96	80.58
	30*	10	35.82	69.85	87.87	116.7	119.5
		100	39.53	83.48	111.2	155.2	159.6
		1000	39.58	83.67	111.6	155.9	160.2
Spline element method[1]			39.58	83.67	111.6	155.9	160.2
		5	17.19	29.23	42.90	44.84	51.75
	60*	10	19.64	35.82	55.85	59.48	69.85
		100	20.78	39.53	64.54	69.87	83.48
		1000	20.79	39.58	64.65	70.01	83.67
Spline element method[1]			20.79	39.58	64.65	70.01	83.67
		5	14.56	20.60	29.23	39.41	41.16
	90*	10	16.38	24.03	35.82	50.94	53.17
		100	17.19	25.71	39.53	58.50	61.04
		1000	17.20	25.73	39.58	58.60	61.14
Spline element method[1]			17.20	25.73	39.58	58.60	61.14

く現れてくるので、薄板の場合と比較して振動数パラメータがかなり小さくなる。

Fig. -2と3には、相対する2つの円弧辺で固定された変厚扇形Mindlin板の振動数パラメータに与える変厚比、幅厚比と半径比の影響が示してある。ただし、中心角は 45° に仮定している。これより、板の厚さが薄い

ほど、変厚比の影響が顕著に生じてくる。また、半径比が大きいほど変厚比の影響が大きくなる。

さらに、高次の振動数ほど、変厚の影響を受けることが明らかになった。

4. あとがき 本文では、スプライン帯板法を用いて、変厚扇形Mindlin板の振動解析を行い、その振動特性に与える半径比、中心角、変厚比や幅厚比などの影響について明らかにした。主な結果を示せば、以下のようになる。1) スプライン帯板要素を用いれば、少ない分割数で安定した収束値が得られる。2) 変厚扇形板の振動特性に与える変厚比の影響は幅厚比と半径比が大きいほど顕著に見られる。3) 扇形板のように非対称な板では、半径方向に板厚を増加させることにより、等厚の場合と比較して、板の剛性を容易に高められる。

参考文献 1) Mizusawa, T. et al.: 1992 JSV 154(1), 147-160. Vibration of tapered thickness annular sector plates by spline element method. 2) Mizusawa, T. et al.: 1994 Comput. Struct. 53(5), 1205-1215. Vibration of annular sector Mindlin plates using the spline strip method.

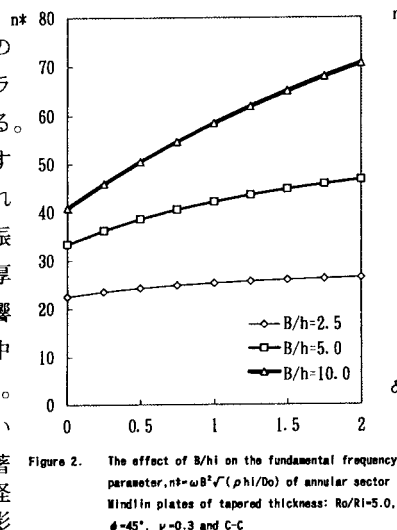


Figure 2. The effect of B/hi on the fundamental frequency parameter, $n^* = \omega B^2 \sqrt{(\rho h i / Do)}$ of annular sector Mindlin plates of tapered thickness: $Ro/Ri=5.0$, $\phi=45^\circ$, $\nu=0.3$ and C-C

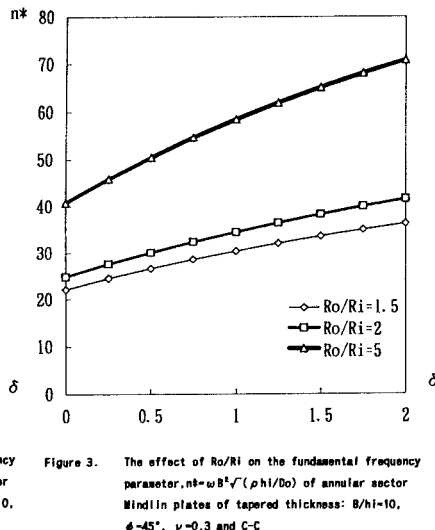


Figure 3. The effect of Ro/Ri on the fundamental frequency parameter, $n^* = \omega B^2 \sqrt{(\rho h i / Do)}$ of annular sector Mindlin plates of tapered thickness: $B/hi=10$, $\phi=45^\circ$, $\nu=0.3$ and C-C