一様熱流を受ける矩形剛体介材物から発生したクラック

東急建設（株）　正会員　吉川和夫
名古屋工業大学　正会員　長谷部宣男

1.まえがき

一様熱流を受ける外力境界値問題としてOvaloid holeを有する無限板の解析［1］，変位境界値問題としての解析［2］，また，混合境界値問題（境界条件として外力，変位の両者が与えられる問題）として円形剛体介材物から発生したクラックの解析［3］が既に報告されている．本解析では一様熱流を受ける矩形剛体介材物から発生したクラッの混合境界値問題の解析を行った．解析には，任意形状の孔を有する無限領域を単位円外に写像する有理型写像関数とdislocation法により求められる単位円外で正則となる複素応力関数の一般解を求めて応力解析を行った．また，熱流の作用方向を変化させクラック先端の応力拡大係数を考察した．ここで母材と剛体介材物の境界面での熱の出入りはないものとして解析を行っている．したがって，矩形孔の縁周を剛に補強されクラックの発生した場合のモデルでもある．

2.解析モデルと解析方法

解析モデルは，無限板中に存在する矩形剛体介在物の隅角部に発生したクラックを考える（**図-1**）．解析方法は，**図-1**の示す解析領域（z-plane）を単位円外（ζ-plane）に写像する分数の和の形で表される次式の有理型写像関数を用いる［4］．

$$Z = E_0\zeta + \sum_{k=1}^{n}\frac{E_k}{\zeta_k - \zeta} + E_{-1}$$

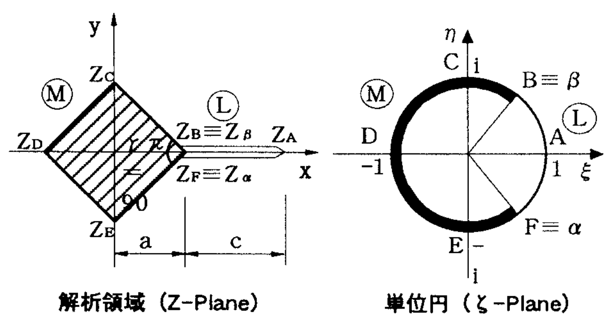

図-1　解析領域と単位円

$E_0, E_k, E_{-1}, \zeta_k$は形状を決定する定数である．剛体介材物と弾性体が接している部分を変位境界M，接していない部分を外力境界Lとする．解析領域の変位境界と外力境界の接点の座標をZ_α，Z_β，それに対応するする単位円上の点をα, βとする．このパラメーターα, βを変化させることにより，剥離長を変えることができる．本解析では剥離は生じていないものとして，すなわち，剥離長は0（Z_B=Z_β, Z_F=Z_α)に固定して解析を行う．変位，応力の境界条件式は次式で与えられる．

$$\phi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{\phi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} = i\int(P_x + iP_y)ds \qquad \text{on L}$$

$$\kappa\phi(\sigma) - \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{\phi'(\sigma)} - \overline{\psi(\sigma)} = 2G(u+iv) - 2G\alpha'\int\Psi(\sigma)\omega'(\sigma)d\sigma \qquad \text{on M}$$

ここに，$\phi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$は単位円外で正則な複素応力関数，$\Psi(\zeta)$は単位円外で正則な複素熱関数，νはポアソン比，α_0は熱膨張係数，Gはせん断弾性係数である．κ，α'は，平面ひずみ状態で$\kappa=3-4\nu$，$\alpha'=(1+\nu)\alpha_0$，一般化された平面応力状態で$\kappa=(3-\nu)/(1+\nu)$，$\alpha'=\alpha_0$である．P_x，P_yは外力境界上(L)のx, y方向外力，u，vは変位境界上(M)でのx, y方向変位で，一般性を失うことなく，境界条件としてL上で$P_x = P_y = 0$，M上で$u=v=0$を与え単位円外で複素応力関数が正則となるように一般解を求める．この一般解の誘導の詳細については，文献［3］に報告されているので省略する．

3.解析結果

図-2（c/a=1.0，材料定数κ=2)に，熱流がX軸方向（$\delta\pi$=0°）から作用した場合のX軸上および境界上(ABCD)での応力分布図(上下対称より上半分)を示した．A-B間はクラック上，BCDは剛体介材物との境界上

の応力を表す．$\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$は境界上(BCD)での法線方向応力，接線方向応力，接線方向せん断応力を表し，σ_x, σ_y はX軸上および境界上(A-B)でのX,Y方向応力を表す．応力値は図中のように無次元化を施している．横軸の値は境界上およびX軸上での実部を長さａで除して無次元化している．クラック先端および介材物先端において応力集中がみられる．

図-3(a)(b)は，横軸には矩形とクラックの長さの比c/a(0≦c/a≦1)，a/c(1≦a/c≦0)をとり，X軸方向熱流が作用した場合，Y軸方向の熱流が作用した場合のクラック先端A点での無次元化した応力拡大係数の解析結果（材料定数κ=1,2,3）である．応力拡大係数は次式で無次元化を行っている［3］．

$$F_I + iF_{II} = \frac{k}{\alpha_0 qGR}\frac{K_I + iK_{II}}{\sqrt{\pi C'^3}} \qquad C' = (2a + c)/2$$

解析結果より，X軸方向熱流（$\delta\pi$=0°）が作用した場合は，モードⅠの無次元化した応力拡大係数は材料に係わらずクラック発生直後は単調増加の傾向を示し，その後極値を示して最終的に負および0になることから矩形剛体介材物から発生したクラックはある長さで停止する．Y軸方向熱流（$\delta\pi$=90°）が作用した場合は，モードⅡの無次元化した応力拡大係数はクラック発生後に単調減少し，クラック長が矩形の大きさに比べ限りなく大きくなる(a/c=0)と-0.5に収束する．任意方向の熱流に対する応力拡大係数は，$\delta\pi$=0°と$\delta\pi$=90°の結果の重ね合わせにより得られる．

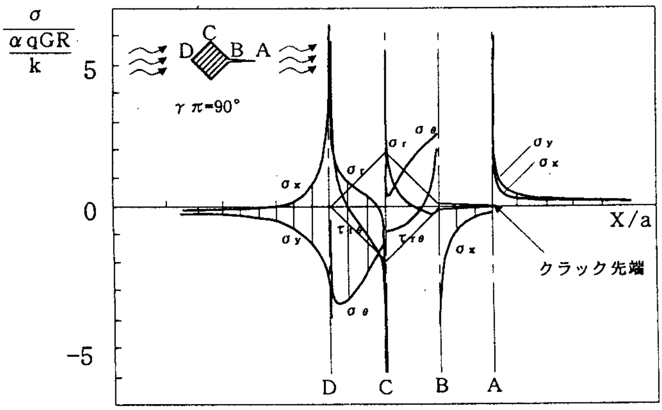

図-2　応力分布（κ=2）

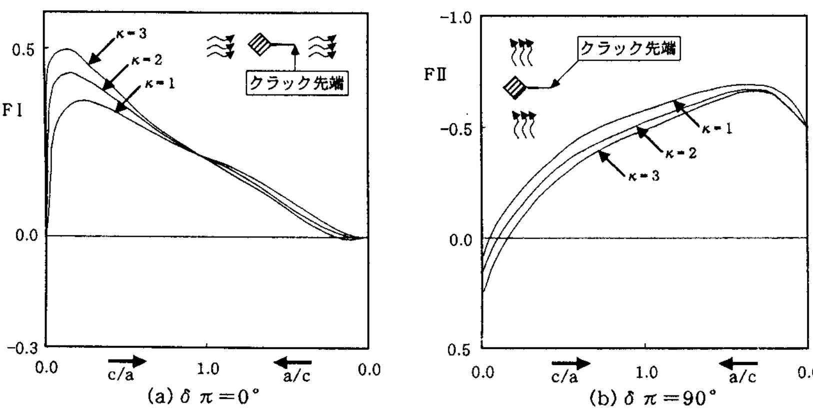

図-3(a)(b)　無次元化した応力拡大係数

【参考文献】
[1] Florence,A.L. and Goodier,J.N., "Thermal Stress due to Disturbance of Uniform Heat Flow by an Insulated Ovaloid Hole," ASME Journal of Applied Mechanics,Vol.27,pp.635-639,1960.
[2] N.Hasebe,H.Tomida,and T.Nakamura, "Solution of Displacement Boundary Value Problem Under Uniform Heat Flux," Journal of Thermal Stresses,Vol.12,pp.71-81,1989.
[3] N.Hasebe,H.Irikura,and T.Nakamura, "A Solution of the Mixed Boundary Value Problem for an Infinite Plate with a Hole under Uniform Heat Flux," ASME Journal of Applied Mechanics,Vol.58,pp.996-1000,1991.
[4] N.Hasebe,and M.Ueda, "Crack Originating from a Corner of a Square Hole," Engineering Fracture Mechanics,Vol.13,pp913-923,1980.