

F E Mによる非定常一飽和・不飽和浸透流解析の計算条件

愛知工業大学 正 員 木村 勝行

愛知工業大学 学生員 口石 孝幸

1. まえがき

非定常一飽和・不飽和浸透流を有限要素法(F E M)によって解析すると、メッシュサイズ(空間きざみ)と計算時間ステップ(時間きざみ)、さらには許容誤差の組み合わせによって、計算時間ステップごとに解が収束する安定な場合でも、得られた解に差がでることがある。これらの組み合わせがどんな条件を満たすときに正解が得られるかについては、今のところ明らかとなっていない。

本報告では、数値計算結果が正解であることが確かめられている浸透問題を取り上げ、いろいろな時間きざみと許容誤差の組み合わせによって得られる解を正解と比較し、非定常一飽和・不飽和浸透流をF E Mによって解析する場合に満たすべき計算の条件について検討を行った。

2. 解析モデルおよび解析方法

解析モデルは、図-1に示す Vauclinら¹⁾が実験と数値解析を行ったものである。同図において、x軸とz軸は不透水面であり、解析領域は高さ200cm、長さ300cm、厚さ5cmである。外水位は65cmに保たれる。領域の飽和透水係数は $k_s=35\text{cm/h}$ 、飽和体積含水率は $\theta_s=0.30$ である。実験開始とともに、領域上面z軸から50cmの範囲に一定量 $q_0=14.8\text{cm/h}$ がかん養される。領域の不飽和透水特性は、実験の計測データから算出され、圧力水頭 $h(\text{cm})$ と飽和度 θ/θ_s の関係は $\theta/\theta_s=40000/(40000+|h|^{2.90})$ 、 h と相対透水係数比 k/k_s の関係は $k/k_s=2.99 \times 10^6/(2.99 \times 10^6+|h|^{5.90})$ を得た。これらの関係を用い、差分法によって計算を行い、図-1に示す $t=0, 2, 3, 4$ および8h後の浸潤面形を示している。本報告では、 $t=3\text{h}$ 後の浸潤面とz軸との交点(P点とする)のz座標を H_p とし、Vauclinらの計算による H_p とここでのF E M解析による H_p とを比較し、検討を加える。なお、Vauclinらの図からは $H_p=98\sim 100\text{cm}$ と読み取れる。F E Mによる定式化には Galerkin 法による重み付き残差法を採用し、時間項には中央差分法を適用して、各時間区間に対して許容誤差以下になるまで反復計算した。要素分割は、x方向の0~100cm間は $\Delta x=10\text{cm}$ 、100~280cm間は $\Delta x=20\text{cm}$ 、280~300cm間は $\Delta x=15\text{cm}$ と5cmとした。y方向は0~65cm間では $\Delta y=9.3\text{cm}$ 、65~200cm間は $\Delta y=5\text{cm}$ とし、四辺形要素を2個の三角形で組み立て、2通りの分割方法によって結果を平均した。節点数770、四辺形要素数714である。計算時間きざみ $\Delta t(\text{s})$ は1, 2.5, 5, 10, 20, 60, 100, 200および225, 許容誤差 $\Delta E(\text{cm})$ は0.001, 0.0025, 0.005, 0.01, 0.025, 0.05, 0.1および0.25とし、 Δt と ΔE の種々の組み合わせについて解析を行った。

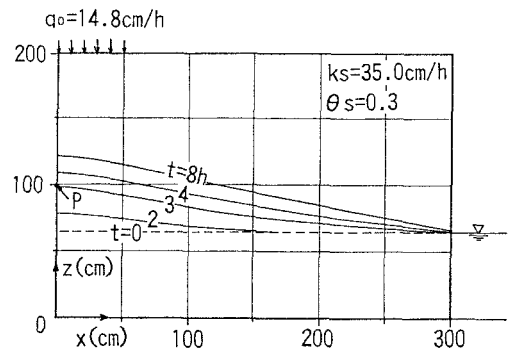


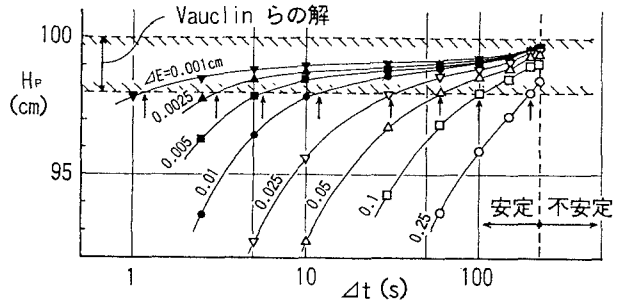
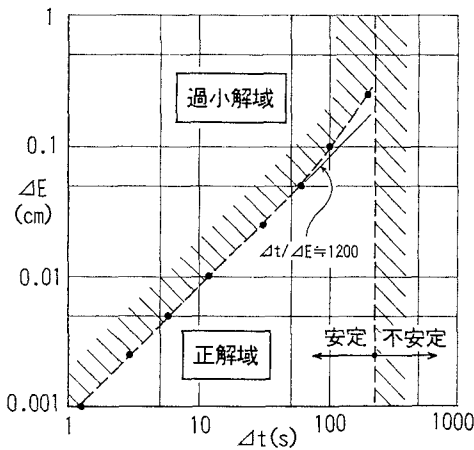
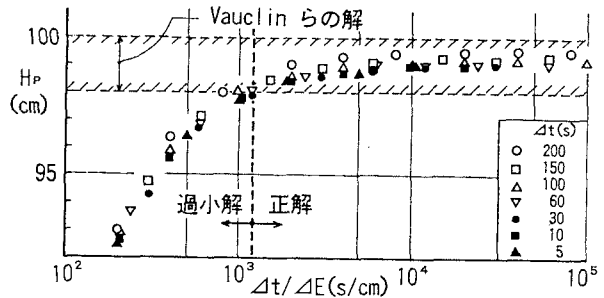
図-1 Vauclin らの計算による浸潤面形

3. F E M解析結果および検討

図-2は $t=3\text{h}$ における H_p についてF E M解析結果を示したものである。記号は ΔE の値で区別されている。 $\Delta t=240\text{s}$ とした場合の計算ではすべての ΔE に対して解は収束することなく不安定であった。 $\Delta t=225\text{s}$ の場合には $\Delta E \leq 0.0025\text{cm}$ に対して不安定、 $\Delta E \geq 0.005\text{cm}$ に対して安定であった。図では、 $\Delta t=225\text{s}$ を安定と不安定の境界としている。図には、Vauclinらによる正解の H_p の範囲(98~100cm)を示してあるが、F E M解析ではこの範囲の上方の解($H_p > 100\text{cm}$)は得られていない。一方、下方の解($H_p < 98\text{cm}$)は

いずれの ΔE の場合にも現れている。図に見られるように、同一の ΔE に対しては Δt を小さくした場合ほど H_p の値は小さく得られる。正解を得る Δt の範囲は、 $\Delta E=0.001\text{cm}$ に対して $\Delta t \approx 1 \sim 200\text{s}$ であるが、 $\Delta E=0.1\text{cm}$ に対しては $\Delta t \approx 100 \sim 225\text{s}$ と狭まっている。すなわち、 ΔE を小さく設定した場合ほど正解を得る Δt の範囲は広がる。図の $\Delta E=\text{const.}$ としたそれぞれの曲線に対して、正解と過小解の境界値($H_p=98\text{cm}$)を与える Δt の位置を同図中に矢印($\uparrow$)で示した。これらの ΔE と Δt の値を新たに図-3に示す。図から、 $1 < \Delta t < 100$ および $0.001 < \Delta E < 0.1$ の範囲における過小解域と正解域の境界上の点(Δt , ΔE)は同一直線上に位置し、この直線の勾配はほぼ1となっている。つまり、 $\Delta t / \Delta E \approx \text{const.}$ となっている。図から、 $\Delta t / \Delta E \approx 1200$ が得られる。したがって、上記の範囲の Δt と ΔE の組み合わせによる計算においては、 $\Delta t / \Delta E > 1200$ の場合には正解が得られ、 $\Delta t / \Delta E < 1200$ の場合には過小解を得ることがわかる。図-4は、図-3に対する検討結果を受けて、 $H_p(\text{cm})$ と $\Delta t(\text{s})$ と $\Delta E(\text{cm})$ の関係を $H_p \sim \Delta t / \Delta E$ 関係として整理したものである。

前図-3において過小解域と正解域の境界は $\Delta t / \Delta E \approx 1200$ と表されたことが図-4によって再確認できる。さらに、正解および過小解域のすべての $\Delta t / \Delta E$ の組み合わせに対し、 $H_p \sim \Delta t / \Delta E$ 関係は、概ね、ただ一本の曲線に集約されることが見とれよう。

図-2 Δt と ΔE による解の差図-3 正解と過小解との境界となる Δt - ΔE 関係図-4 $H_p \sim \Delta t / \Delta E$ 関係

4. おわりに

本報告では、非定常-飽和・不飽和浸透問題をFEMによって解析する場合に、計算時間きざみ(Δt)と許容誤差(ΔE)の組み合わせによる解の差について検討し、 $\Delta t / \Delta E$ の値によって過小解域と正解域が分けられる例を示した。今後の課題として、メッシュサイズによる解の差および適切なメッシュサイズと計算時間きざみの決め方などがあげられる。

【参考文献】

- 1) Vauclin, M., Khanji, D. and Vachaud, G. (1979): "Experimental and Numerical Study of a Transient, Two-Dimensional Unsaturated-Saturated Water Table Recharge Problem," Water Resources Research, Vol. 15, No. 5, pp. 1089-1101.