点推定法を導入した確率的解析手法の提案

金沢大学大学院　○藤野　崇之
金沢大学工学部　正会員　池本　敏和
金沢大学工学部　正会員　北浦　勝

1.はじめに

離散変数を有するシステムの確率的挙動解析は、近年の限界状態設計法への移行や、安全率の算出などにおいて必要不可欠なものである。解析手法の代表的なものにはランダム・サンプリング法（モンテカルロ・シミュレーション法）がある。この手法は簡便で汎用性が高いため、様々な分野で適用されている。一方で、一定の解析精度を得るためには多数の試行回数を必要とすること、解析過程が一般的な閉じた形式で得られないことなどの改善の余地が指摘されている。

これに対し、線形近似法やインポータンス・サンプリング法、点推定法など、様々な手法が提案されている。本研究ではこの中で点推定法(PEPM;Point Estimate for Probability Moment method)を取り上げ、数値計算における効率化について検討した。

2. 点推定法

点推定法はRosenbluethにより1975年に提案されたもので、以下に示すような長所を有している。

・2点推定法で線形2次近似法程度の正確さが期待できる。
・解析において、一般的な式を得ることができる。

基本的な考え方であるが、システムに入力する確率変数を、図1に示すような有限個（N個）のパルス的な離散型分布に置き換えることにより、一般化された形で解を求めるというものである。以下、簡単にN点推定法の概要を示す。

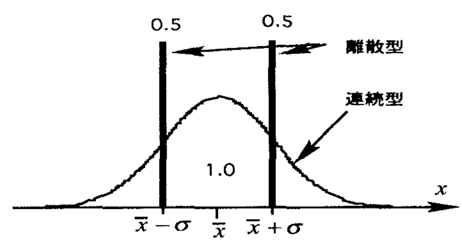

図1　確率密度関数の変換(２点推定法の場合)

確率モーメントが既知である入力変数xの確率密度関数を、式(1)に示すものに置き換える。

$$f_x(x)=\sum_{i=1}^{N} p_i\delta(x-x_i) \qquad (1)$$

ここで、δ ：ディラックのデルタ関数
　x_i：推定点の座標
　p_i：推定点における確率密度

p_i及びx_iはxの確率モーメントの式を連立方程式として解くことにより得られる。このとき、方程式$y=y(x_1,x_2,\cdots x_n)$のm次確率モーメント$E[y^m]$は、下に示すように表される。

$$E[y^m]=\sum_{i_n}^{N}\cdots\sum_{i_2}^{N}\sum_{i_1}^{N}\underbrace{\{p_{1,i_1}\times p_{2,i_2}\times\cdots\times p_{n,i_n}\}}_{\text{(a)　生起確率}}y^m\underbrace{(x_{1,i_1},x_{2,i_2},\cdots x_{n,i_n})}_{\text{(b)　変数セット}} \qquad (2)$$

ここで、(a)は変数セット(b)の生起確率である。

一般に入力確率変数x_{j,i_j}の分布形は、1次（平均）、2次（分散）、3次（対称性）及び4次（尖頂性）の確率モーメントで定義することができる。これら４つのモーメントは3点推定法により導入が可能であり、一般には3点より多い点推定は、精度及び計算回数の面からみても不必要であると考えられる。

3. 多変数を有するシステムの解析に適用した点推定法の効率化について

点推定法の欠点は、多変数を有するシステムの解析に点推定法を適用した場合、変数の数が増えるにつれ試行回数が指数関数的に増大するということである。

式(2)より、入力変数がn個の方程式$y=y(x_1,x_2,\cdots x_n)$にN点推定法を適用した場合の試行回数はN^n回となる。

例えば10変数を持った方程式に3点推定法を適用した場合の試行回数は59,049回となる。同じ方程式に2点推定法を適用した場合の試行回数は1,024回であり、これで線形2次近似法程度の精度が期待できるのだから、入力変数の分散が同じことを考え合わせると、3点推定法の試行回数はいささか過剰である感が否めない。

多変数を有するシステムに入力される変数は、その分布形が同一であるものが多い。例えば有限要素法の各要素の弾性係数を確率変数とした場合、確率変数の数は要素の数に一致するが、分布形の種類はもっと少ない種類（例えば正規分布のみ）に限られる。つまり、全確率変数中、複数の入力変数が同一の分布を示す場合、式(2)の(a)部分で算出される変数セットの生起確率は、変数セットの数（=試行回数）と比べて限られた数しかない。これを踏まえて式(2)を書き換えると、

$$E\left[y^m\right]=\sum_{i=1}^{s}\left\{\sum_{j=1}^{n_i}\left(p_i\right)y^m\left(v_{i,j}\right)\right\}=\sum_{i=1}^{s}\left[P_i\times\left\{\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}y^m\left(v_{i,j}\right)\right\}\right] \qquad (3)$$

ここで、 s : 生起確率の種類数

p_i: 生起確率 i (i=1～s)

$v_{i,j}$: 生起確率 i のグループに属する変数セットj

n_i : グループ i の変数セットの数

P_i: $p_i\times n_i$、すなわち変数セットグループ i の代表値が解に及ぼす重み

例として、10変数が全て正規分布する場合の変数セットの生起確率を図2(a)に示す。図2(b)は各生起確率に属する変数セットの度数分布を示している（度数の総和は全試行回数）。図2(c)は(a)×(b)、すなわちP_iを表わす。

(b)と(c)を比較すると、(b)と(c)の頂点がずれていることがわかる。すなわち、n_iが大きいグループが必ずしも解に対して大きな影響を及ぼすわけではない。例として挙げた10変数の場合、グループ5～グループ11について注目すると、解に及ぼす重み$P_{i=5\sim11}$の和は全体の約98%に達する。これに対し、全試行回数59,049回に占める試行回数の和は26,025回であり、割合にして約44%である。このことから、入力が及ぼす影響については、総試行よりも少ない試行でシミュレートすることが出来る。ただし、この手法で対象としているシステムが複雑であり、出力の傾向をシミュレーション前に捕えることが難しいことから、解を求めるのに必要な最小試行回数を数学的に導き出すことは、ほぼ不可能であると考えられる。そこで式(3)を変形し、下のような式を用いて収束計算を行う。

$$E\left[y^m\right]=\frac{1}{n_c}\sum^{n_c}\left[\sum_{i=1}^{s}\left\{P_i\times y^m\left(v_{i,r}\right)\right\}\right] \qquad (4)$$

ここで、n_c : 解が収束するのに必要な最小試行回数

$v_{i,r}$: グループ i の中からランダムに抽出した変数セット

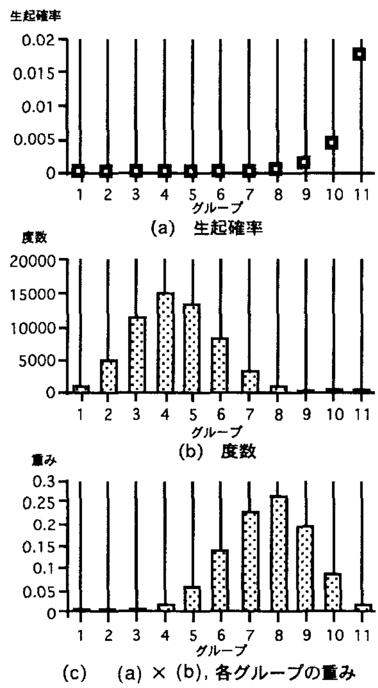

図2 生起確率別変数グループ

ただし、入力する確率変数の変動係数が大きい場合は解の収束が遅くなる可能性が大きく、また入力変数ごとに全く異なった分布を有する場合は、上に示した方法では試行回数を減らすことが難しい。

4. 最後に

点推定法は比較的簡単な理論で高精度の確率的解析を可能にした手法である。本研究では点推定法の短所である多変数を有するシステムの解析への適用を論じ、その具体的方策を示した。