

流れを考慮したBoussinesq方程式による砕波変形モデル

名古屋工業大学 正会員 柏原謙爾
名古屋工業大学 学生員 山田明宏
名古屋工業大学 正会員 喜岡 渉

1. はじめに

Boussinesq方程式は現在のところ砕波減衰を組み込むことの可能な唯一の波動方程式である。しかし、従来の砕波変形の計算例では、経験則に強く依存する砕波モデルを用いて係数の評価を行い、運動量式中の摩擦項や粘性項に砕波減衰項として補正項を付加したもの（例えば、片山・佐藤，1990）がほとんどである。異なる手法を用いたものにはShaffer et al. (1993)のSurface rollerによるモデルがあるが、これも運動量式の補正項についての物理的根拠が明確でない。砕波に伴い発生する乱れをモデル化したものにはKarambas・Koutitas (1992)の研究例がある。しかしながら、彼らのモデルでは乱れ場に対し0方程式モデルを導入することとどまっており、砕波のように局所性の強い現象の解析を行う場合には、より合理的に渦動粘性係数を評価されるモデルを構築する必要がある。一方、砕波帯を含む波動場は戻り流れやrip current等の強い流れを伴い、波動場にも影響を及ぼすことから、乱れのみならず流れについてもその効果を考慮する必要がある。本研究は、流れ・波動・乱れのための相互干渉を考慮したBoussinesq型の波動方程式を誘導し、その適用性について検討するものである。乱流モデルとしては2方程式モデルを用い、渦動粘性係数を乱れエネルギー $\tilde{k}$ と分子粘性逸散率 $\tilde{\epsilon}$ の関数として評価する方法をとった。

2. 流れ・波動・乱れの相互干渉を考慮したBoussinesq方程式

断面2次元の非圧縮性流体を考える。また、分子粘性応力は無視できるほどに微小であると仮定する。断面平均水平方向流速 u と水面変動 ζ は流れ、波、乱れ（それぞれ添字 c 、 w 、 $'$ で表し、水面変動の乱れ成分については0とみなす。）の3成分の和として次式(1)の様に表す。

$$\zeta = \zeta_c + \zeta_w, \quad u = u_c + u_w + u' \quad (1)$$

Boussinesq方程式では波の分散性についての近似オーダーを精度の尺度に用いるため、方程式の誘導に際しては各成分の変動オーダーに仮定を設けておく必要がある。ここでは流れ場については戻り流れ等の比較的速い流れを、乱れ場についてはその変動スケールが水深程度である底面摩擦や砕波による乱れを対象とすると、乱れと波、および流れの変動スケールは次のように関係付けられる。

$$O(u') \sim h_0 / (T \sqrt{g h_0}) O(u_w) = 1/2\pi O(\mu u_w) \sim O(\epsilon \mu u_c) \sim O(\epsilon \mu \sqrt{g h})$$

ここに T は波の代表周期、 $\epsilon = a_0/h_0$ (a_0 : 波の代表振幅、 h_0 : 代表水深)、 $\mu^2 = \omega^2 h_0/g$ (ω : 角周波数)であり、それぞれ非線形性、分散性についてのパラメーターである。波動場に対しては両パラメーター間で $\epsilon^2/\mu^2 \sim O(1)$ の関係が成り立つものとし、かつ $O(\epsilon \mu^2, \mu^3)$ の精度が得られるようにここでは $O(\epsilon^2 \mu^2, \mu^4)$ の高次項まで考慮しておく、 u 、 ζ を未知量とする方程式(2)、(3)を得る。

$$\zeta_t + [(h + \zeta)u]_x = 0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & [(h + \zeta)u]_t + [(h + \zeta)uu]_x + (h + \zeta)g\zeta_x + \left[\frac{1}{6}h^3u_{xx} - \frac{1}{2}h^2(hu)_{xx} - h\{\zeta(hu)_x\}_{xx} \right] \\ & + \left[\frac{1}{6}h^3\{uu_x\}_{xx} - \frac{1}{2}h^2\{u(hu)_x\}_{xx} - h\{\zeta u(hu)_x\}_{xx} \right] - \left[\frac{1}{3}h^3\{(u_x)^2\}_x - h^2\{u_x(hu)_x\}_x + h\{((hu)_x)^2\}_x \right] = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

ここに、添字 t および x はそれぞれ時間および空間についての微分を表す。なお、式(2)、(3)の誘導には、 $O(\partial h/\partial x) \sim O(\partial u_c/\partial x) \sim O(\partial \zeta_c/\partial x) \sim O(\mu)$ 、 $O(\partial u_c/\partial t) \sim O(\partial \zeta_c/\partial t) \sim O(\mu^2)$ の仮定が使われている。式(2)、(3)に式(1)を代入し、各変動成分間のスケール分離を行うと流れの方程式と波の方程式が得られる。このとき、 ϵ 、 μ が共に微小であるとする各成分の変動スケールは大きく隔たっているものとみなせ、各変動成分間の相関は無視できる。最終的に流れ場の方程式は次の式(4)、(5)で表される。

$$\zeta_{ct} + [(h + \zeta_c)u_c + \langle \zeta_w u_w \rangle]_x = 0 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & [(h + \zeta_c)u_c + \langle \zeta_w u_w \rangle]_t + [(h + \zeta_c)u_c u_c + 2u_c \langle \zeta_w u_w \rangle]_x + g(h + \zeta_c)\zeta_{cx} + [(h + \zeta_c)\langle u_w u_w \rangle + \langle \zeta_w u_w u_w \rangle + \frac{1}{2}\langle \zeta_w \zeta_w \rangle]_x \\ & + \left[-\frac{1}{3}h^3\langle (u_w u_{wx}) \rangle_{xx} - \frac{1}{3}h^3\langle (u_{wx} u_{wx}) \rangle_x - h^2 u_c \langle \zeta_w u_{wx} \rangle_{xx} \right] - \left[h^2 \langle \zeta_w u_{wx} \rangle_{xt} \right] + [h(u'u')]_x = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

ここに、 $\langle \rangle$ は波スケールでの周期平均を示している。流れとの干渉項を含む波動場の方程式は煩雑となるため、ここでは干渉項を落とした式を示すと次の式(6)、(7)となる。

$$\zeta_{w,t} + [(h + \zeta_w)u_w]_x = 0 \quad (6)$$

$$u_{w,t} + u_w u_{w,x} + g \zeta_{w,x} + \left[\frac{1}{6} (-\zeta_w h + h^2) \mu_{w,xx} + \frac{1}{2} (\zeta_w - h) (hu_w)_{xx} \right] - [\zeta_w (hu_w)_{xt}]_x \\ + \left[u_w \left\{ \frac{1}{6} h^2 \mu_{w,xx} - \frac{1}{2} h (hu_w)_{xx} \right\} \right]_x - \frac{1}{2} [(hu_w)_x]^2 \Big|_x + [h \langle (u'u') \rangle]_x = 0 \quad (7)$$

ここに、 $\langle \rangle$ は乱れスケールでの周期平均を示している。式(7)左辺の最後の項が乱れ成分に起因する Reynolds 応力項で、そのオーダーは $\varepsilon \mu^2$ である。すなわち、波動方程式においては $\varepsilon^2/\mu^2 \sim O(1)$ で $O(\varepsilon \mu^2, \mu^3)$ のオーダーまで考慮することにより初めて Reynolds 応力項が式中に現れる。なお、この項を省略した場合の式(6)、(7)は非線形性 ε について 1 次高次まで考慮した Boussinesq 方程式 (喜岡・柏原, 1995) に一致しており、従来の $O(\varepsilon, \mu^2)$ のオーダーまでの Boussinesq 方程式と比較して碎波点近傍での予測精度が向上することが予想される。

3. 乱れ場のモデル化

式(7)中の Reynolds 応力項については Rastogi・Rodí (1978) にならい、断面平均の乱れエネルギー $\tilde{k}$ と乱れエネルギー逸散率 $\tilde{\varepsilon}$ を未知量とする次の 2 方程式を用いてモデル化する。

$$\tilde{k}_t + [u\tilde{k}]_x = [\tilde{v}_T/\sigma_{\tilde{k}} \tilde{k}]_x + (P_h + P_w) + P_{\tilde{k}_v} - \tilde{\varepsilon} \quad (8)$$

$$\tilde{\varepsilon}_t + [u\tilde{\varepsilon}]_x = [\tilde{v}_T/\sigma_{\tilde{\varepsilon}} \tilde{\varepsilon}]_x + C_{1\tilde{\varepsilon}} \tilde{\varepsilon}/\tilde{k} (P_h + P_w) + P_{\tilde{\varepsilon}_v} - C_{2\tilde{\varepsilon}} \tilde{\varepsilon}^2/\tilde{k} \quad (9)$$

ここに、 $\tilde{v}_T (= C_\mu \tilde{k}^2/\tilde{\varepsilon})$ は渦動粘性係数、 P_h は乱れエネルギー生成項、 $P_{\tilde{k}_v}$ 、 $P_{\tilde{\varepsilon}_v}$ はそれぞれ $\tilde{k}$ 、 $\tilde{\varepsilon}$ 方程式における P_h の補正項であり、各項は Rastogi・Rodí (1978) の評価方法に従った。 P_w は碎波による乱れエネルギーの生成項であり、ここでは岩垣ら (1981) の算定方法を用いて碎波した波のエネルギー逸散率 D を求め、 $P_w = D/\rho(h + \zeta_w)$ として与えた。定数 $C_{1\tilde{\varepsilon}}$ 、 $C_{2\tilde{\varepsilon}}$ 、 $\sigma_{\tilde{k}}$ 、 $\sigma_{\tilde{\varepsilon}}$ についてはそれぞれ $\tilde{k}$ - $\tilde{\varepsilon}$ モデルで従来よく用いられている値 1.44、1.92、1.0、1.3 を用いた。 C_μ は一般に 0.09 という値が使用されるが、ここでは碎波による波高減衰がうまく再現できるように値を調整する。Bore モデルをあてはめると C_μ は 10 前後の値をとることがわかる。碎波の判定には合田の碎波指標式を用いた。

4. 数値解析結果

数値計算は差分法によった。なお、時間積分は 3 次の Adams-Bashforth-Moulton 法で行っている。図-1 は沖側水深を 10 [m] とし、 $x = 50$ [m] の地点から勾配 1/20 の斜面を設けて、波高 1.0 [m]、周期 9 [s] の正弦波を入射させた場合の碎波点付近の水面変動の空間波形を示すものである。Case 1, 2 はそれぞれ C_μ の値を 10、15 としたものであるが、10 以上の値を選ぶとき C_μ 値の差は波高減衰に大きく影響しない。

5. おわりに

本研究では、流れの影響と碎波減衰を同時に考慮した Boussinesq 型の方程式を誘導し、この方程式系により碎波減衰を合理的に評価できることを明らかにした。ただし、碎波変形の定量的評価を行うにはモデル定数の再同定等についてさらに検討を加えていく必要がある。

参考文献

- 岩垣雄一・間瀬 肇・田中 剛 (1981), 海岸工学論文集, 第28巻, pp.104-108.
 片山裕之・佐藤慎司 (1993), 海岸工学論文集, 第40巻, pp.16-20.
 喜岡 渉・柏原謙爾 (1995), 海岸工学論文集, 第42巻, pp.166-170.
 Karambas, Th. V. and Koutitas, C. (1992), Coastal Eng., Vol.18, pp.1-19.
 Rastogi, A. K. and Rodí, W. (1978), Proc. ASCE, Vol.104, No.HY3, pp.397-420.
 Scälhffer, H. A., Madsen, P. A. and Deigaard, R. (1993), Coastal Eng., Vol.20, pp.185-202.
 Yoon, S. B. and Liu, P. L.-F. (1989), J. Fluid Mech., Vol.205, pp.307-419.

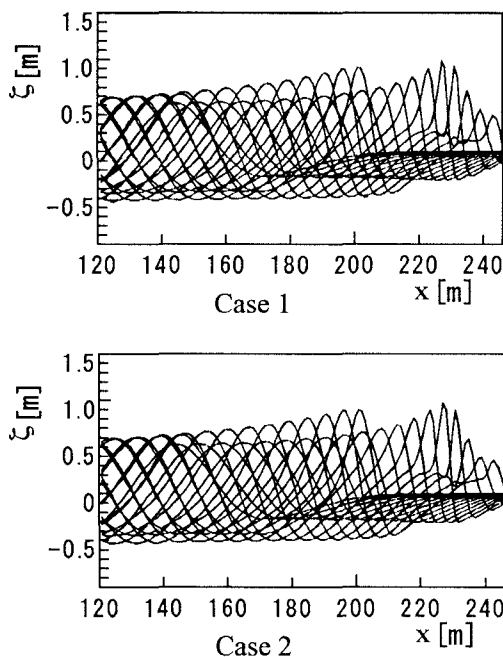


図-1 1/20 勾配斜面上における碎波変形