

スプライン要素法を用いた連続扇形板の振動解析について

大同工業大学学生 ○ 牛島宏子

大同工業大学 正会員 水澤富作

1. はじめに

曲線橋や曲線スラブ橋に見られる曲線スラブや曲線デッキは、橋脚などで連続支持されたり、また剛な主桁や横桁で支持されるので、半径方向や円周方向に線支持された連続扇形板になっている。扇形板は、非対称な平板であるので、4つの支持辺に導入される古典的な境界条件（単純支持、固定、自由）の組み合わせが53通りになり、長方形板とはかなり異なった振動性状が示される。単一扇形板の振動問題については、古くから厳密解法や種々の数値解析法を用いて研究されてきているが、連続扇形板の振動問題は、あまり研究されていないように思われる。Kimら¹⁾は、薄板理論に基づくRayleigh-Ritz法を用いて、中間線支持された扇形板の振動解析を行っている。また、Liewら²⁾は、Mindlin板理論と直交多項式を変位関数に適用したRitz法を用いて、中間線支持された扇形厚板の振動解析を行っている。しかしながら、取り扱っている境界条件に制限が見られ、また連続扇形板の振動特性については余り明確にされていない。

本研究では、図-1に示すような連続扇形板の振動解析へのスプライン要素法³⁾の適用性について検討し、本手法の数値安定性について示している。また、半径方向と円周方向に中間線支持された扇形板の振動特性に与える中心角、半径比、中間線支持などの影響について明らかにしている。

2. 解析手法

ここでは、薄板理論に基づくスプライン要素法を用いて式の定式化を行っている。式の定式化にあたり、無次元化された極座標を用いている。任意の中間線支持された扇形板のひずみエネルギー、 U_p と運動エネルギー、 T_p は、それぞれ次式で与えられる。

$$U_p = \frac{D}{2} \left(\frac{\phi}{B^2} \right) \int_0^1 \int_0^1 \left[\left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + \left(\frac{1}{A} \right) \frac{\partial W}{\partial \eta} + \left(\frac{1}{A^2 \phi^2} \right) \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \right\}^2 \right. \\ \left. - 2(1-\nu) \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \left\{ \left(\frac{1}{A} \right) \frac{\partial W}{\partial \eta} + \left(\frac{1}{A^2 \phi^2} \right) \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \right\} \right. \\ \left. + 2(1-\nu) \left\{ \left(\frac{1}{A \phi} \right) \frac{\partial^2 W}{\partial \eta \partial \xi} - \left(\frac{1}{A^2 \phi} \right) \frac{\partial W}{\partial \xi} \right\}^2 \right] A d\eta d\xi$$

$$T_p = \left(\frac{\rho h}{2} \right) \omega^2 \phi B^2 \int_0^1 \int_0^1 W^2 \cdot \left(\eta + R_i/B \right) d\eta d\xi$$

ここで、 $A = (\eta + R_i/B) = \eta + 1/(\delta - 1)$ 、 $\delta = R_o/R_i$ 、 $B = R_o - R_i$ 、 R_o と R_i は、それぞれ外径と内径を示す。 ν はPoisson比、 ρ は密度、 h は板厚、 D は板剛度、 ϕ は中心角であり、 ω は円振動数(rad/sec.)である。また、中間線支持を含む境界条件は、仮想バネ法を適用して導入している。したがって、扇形板の全ポテンシャルエネルギーを極値化すれば、固有方程式が求められる。

3. 数値計算例及び考察

ここでは、スプライン要素法を用いて、任意の境界条件を持つ連続扇形板の振動解析を行っている。

図-2には、周辺単純支持された連続扇形板の振動数パラメータ、 $n^* = R_o^2 \omega \sqrt{\rho h/D}$ の収束性に与える要素分割数、 $M_r = M \theta$ とスプライン次数、 $k-1$ の影響が示されている。これより、中間線支持された各扇形パネルを3分割以上にする必要がある。

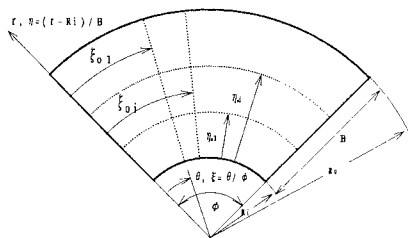


図-1 中間線支持された扇形板と座標系

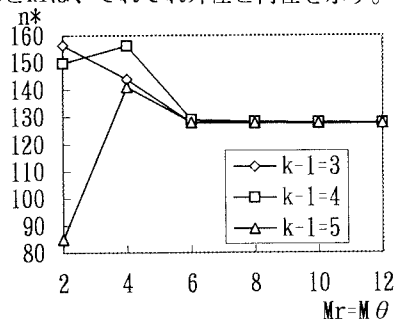


図-2 連続扇形板の振動数パラメータ、 $n^* = R_o^2 \omega \sqrt{\rho h/D}$ の収束性に与える要素分割数とスプライン次数の影響

表-1には、円周方向の中心線で線支持された扇形板($R_o/R_i=5.0$, $\phi=60^\circ$)の振動数 β^* ラメータ, $n\beta^*$ の精度比較が示してある。比較のために、Kimら²⁾のRitz法により求めた解も示してある。これより、任意の境界条件に対して、非常に良く一致した結果が得られている。

表-2は、図-3に示すような半径方向に線支持され、周辺固定された扇形板の振動数 β^* ラメータに与える中心角, ϕ と半径比, R_o/R_i の影響を示している。

図-4と5には、連続扇形板の振動数 β^* ラメータに与える中間線支持モデルの影響が示されている。ここで用いた中間線支持モデルは、図-6に示してある。これより、連続扇形板の振動特性は、半径比と中心角に依存し、特に中心角が増大してくると、中間線支持モデルにより、かなり異なった性状が示される。

表-1 円周方向の中心線で線支持された扇形板の振動数 β^* ラメータ, $n\beta^*=R_o^2 \omega \sqrt{\rho h/D}$ の精度比較; $R_o/R_i=5.0$, $\phi=60^\circ$

Circumferential edge conditions	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th
SS-CC	118.0 *118.1	162.0 162.1	166.5 166.7	226.0 226.3	295.8 296.0	317.6 317.9	340.2 -
SS-CS	86.26 *86.32	127.8 128.0	157.7 158.0	193.8 194.1	285.9 286.1	286.2 286.6	286.5 -
SS-CF	21.49 *21.51	51.11 51.13	103.5 103.5	119.1 119.1	168.4 167.0	173.9 174.2	176.6 -
SS-SC	114.4 *114.4	153.5 153.6	161.9 162.2	226.0 226.5	294.0 294.5	317.6 318.1	322.7 -
SS-SS	85.43 *85.48	127.8 128.0	142.8 143.0	193.8 194.1	279.9 280.2	285.1 285.2	285.7 -
SS-SF	21.40 *21.43	51.11 51.17	103.5 103.5	115.4 115.5	154.7 154.7	173.9 174.6	176.8 -
SS-FC	108.4 *108.4	141.1 141.6	161.9 162.3	226.0 226.6	282.7 283.2	292.7 293.4	317.6 -
SS-FS	84.43 *84.53	126.5 127.0	127.8 128.2	193.8 194.4	261.0 261.0	284.2 284.2	285.9 -
SS-FF	21.34 *21.35	51.11 51.13	103.5 103.5	109.3 109.3	141.2 141.6	173.8 174.2	176.6 -

* Ritz法を用いたKimらの数値解¹⁾

表-2 半径方向に線支持され、周辺固定された扇形板の振動数 β^* ラメータ, $n\beta^*$ に与える中心角, ϕ と半径比, R_o/R_i の影響

ϕ	R_o/R_i		1st	2nd	Modes 3rd	4th	5th
60°	5.0	Type-a	148.8	188.5	250.7	300.5	358.7
		Type-b	154.4	257.5	338.5	378.5	364.9
		Type-c	338.5	418.9	505.7	509.0	559.6
	2.0	Type-a	159.4	192.4	317.5	342.5	359.3
		Type-b	183.4	319.8	339.4	465.0	509.0
		Type-c	339.4	419.0	509.0	521.0	607.2
90°	5.0	Type-a	87.83	108.1	165.4	191.5	195.5
		Type-b	90.67	168.8	185.4	247.8	268.8
		Type-c	185.4	226.0	269.0	293.5	303.8
	2.0	Type-a	114.9	125.7	201.3	228.2	274.4
		Type-b	116.0	192.6	249.9	270.0	274.9
		Type-c	192.8	226.2	270.0	294.0	357.6
120°	5.0	Type-a	63.39	75.77	129.6	133.6	146.6
		Type-b	65.04	124.8	133.7	163.3	176.2
		Type-c	124.8	149.3	176.2	191.1	220.0
	2.0	Type-a	101.9	106.2	146.4	159.9	225.0
		Type-b	102.3	142.2	171.6	181.9	232.1
		Type-c	142.2	159.9	181.9	195.0	305.2

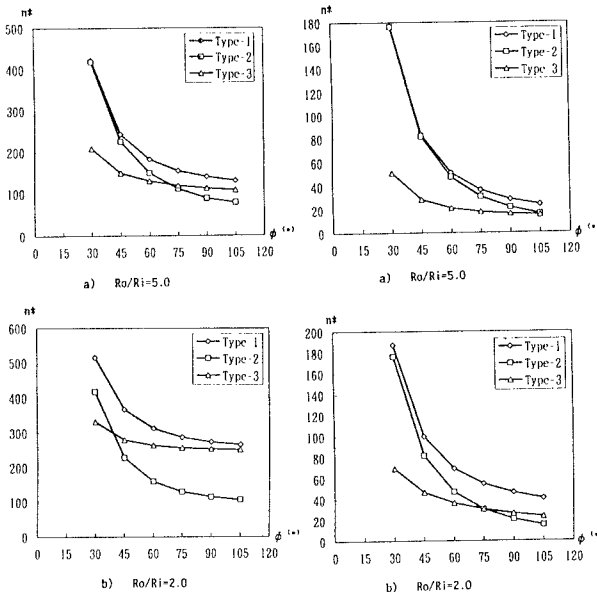


図-4 周辺固定された連続扇形板の振動数パラメータ, $n\beta^*=R_o^2 \omega \sqrt{\rho h/D}$ に与える中間支持モデルの影響

図-5 相対する半径方向の2辺が単純支持され、円弧辺が自由である連続扇形板の振動数パラメータ, $n\beta^*=R_o^2 \omega \sqrt{\rho h/D}$ に与える中間支持モデルの影響

4. あとがき 本文では、スプライン要素法を用いて、連続扇形板の振動解析を行い、その振動特性に与える半径比、中心角や線支承タイプの影響について明らかにした。得られた主な結果を示せば、以下のようになる。1) スプライン要素法を用いれば、任意に線支持された扇形板の振動解析ができ、少ない要素数で精度の高い結果が得られる。2) 連続扇形板の振動特性は、中間線支持に依存し、また半径比、中心角や境界条件によっても大きく変化する。

参考文献 1) C.S. Kim et al.: 1987 JSV **114**, 129-142. The flexural vibration of line supported rectangular plate systems. 2) K.M. Liew et al.: Vibration of annular sector Mindlin plates with internal radial line and circumferential arc supports. JSV **183**, 401-419, 1995. 3) T. Mizusawa: 1993 JSV **53**, 1205-1215. Vibration of annular sector plates by the spline element method.

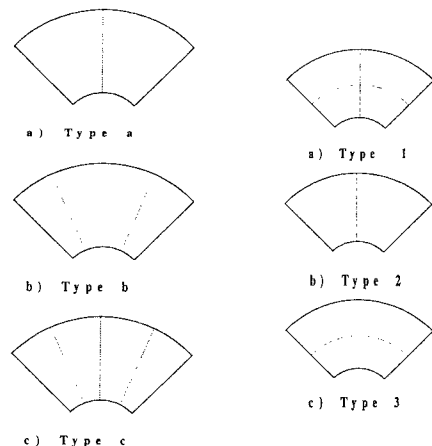


図-3 半径方向に中間線支持された扇形板

図-4 半径方向及び円周方向に中間線支持された扇形板