多重極展開法による境界要素解析の効率化

福井大学工学部　学生員　○　服部純一
福井大学工学部　正会員　　　福井卓雄

1　はじめに

境界要素法を応用するときのひとつの問題点として，密行列を計算しなければならず，問題の自由度が増加すると計算容量および計算時間を多く必要とする点がある。本研究では，天体のシミュレーションにおいて開発され速水ら [1] によって境界要素法に適用された多重極展開法を一般的な形で拡張し，種々の問題の境界要素法に適用することを試みる。

2　効率化の考え方

Laplace 方程式，Helmholtz 方程式のようなスカラー方程式の場合について考える。基本特異解 $G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})$ が与えられていると仮定すると，境界積分方程式は次のようになる。

$$\frac{1}{2}u(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial D}\left[G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})\frac{\partial u}{\partial n}(\boldsymbol{y}) - \frac{\partial G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})}{\partial n(\boldsymbol{y})}u(\boldsymbol{y})\right]ds_y \tag{1}$$

境界上の関数 u, $\partial u/\partial n$ について，離散基底 ϕ_i, ψ_i を導入して

$$u(\boldsymbol{x}) = \sum_i \phi_i(\boldsymbol{x})u_i, \qquad s(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial u}{\partial n}(\boldsymbol{y}) = \sum_i \psi_i(\boldsymbol{x})s_i \tag{2}$$

のように近似する。積分方程式 (1) は離散化されて

$$\frac{1}{2}u(\boldsymbol{x}_i) = \sum_j^N\left(\int_{\partial D}G(\boldsymbol{x}_i;\boldsymbol{y})\psi_j(\boldsymbol{y})\,ds_y\right)s_j - \sum_j^N\left(\int_{\partial D}\frac{\partial G(\boldsymbol{x}_i;\boldsymbol{y})}{\partial n(\boldsymbol{y})}\phi_j(\boldsymbol{y})\,ds_y\right)u_j \tag{3}$$

となる。ここに，$\boldsymbol{x}_i$ は境界上にとった選点である。適当な境界条件が与えられれば，上式は N元一次方程式である。

方程式の次元 N が大きいものとする。もしも，方程式を解く方法としてＳＯＲやＣＧなどの繰り返し法を使うとすると，右辺の内積計算を何度も実行することになるが，これは，一回の繰り返しにつき N^2 程度の計算量である。この計算量を減らすことを考える。

まず，領域を有限個のクラスターに分割する。内積の計算は (1) の右辺の積分を実行することと等価である。互いに十分に離れた二つのクラスター C_k, C_h を考える。$\boldsymbol{x}_i \in C_k$ なる点の集合について，たとえば (Derichlet 問題の場合) 積分

$$u(\boldsymbol{x}_i) = \int_{\partial D\cap C_h}G(\boldsymbol{x}_i;\boldsymbol{y})s(\boldsymbol{y})\,ds_y = \sum_j\left(\int_{\partial D\cap C_h}G(\boldsymbol{x}_i;\boldsymbol{y})\psi_j(\boldsymbol{y})\,ds_y\right)s_j \tag{4}$$

を効率化する。

クラスター C_h の代表点を $\boldsymbol{z}_h$ とする。積分核は一般に$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_h) + (\boldsymbol{z}_h - \boldsymbol{y})$ の関数であるから，これを $x - z_h$ のまわりに Tayler 展開して

$$\begin{aligned} G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}) &= G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{z}_h) + \Delta y_i\frac{\partial G}{\partial x_i} + \frac{\Delta y_i\Delta y_j}{2!}\frac{\partial^2 G}{\partial x_i\partial x_j} + \cdots + \frac{\Delta y_{i_1}\cdots\Delta y_{i_n}}{n!}\frac{\partial^n G}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_n}} + R(\Delta\boldsymbol{y}) \\ &= \sum_{m=0}^n \Gamma_m(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_h)\,g_m(\Delta\boldsymbol{y}) + R(\Delta\boldsymbol{y}) \end{aligned} \tag{5}$$

とする。ここに、$\Delta \boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}_h - \boldsymbol{y}$ である。数値計算上は適当な精度が出せれば良いので, 右辺が n_h 項で必要精度を満足するものとする。

展開 (5) を用いると、(4) の積分は

$$u(\boldsymbol{x}_i) = \sum_j \left(\int_{\partial D \cap C_h} G(\boldsymbol{x}_i; \boldsymbol{y}) \psi_j(\boldsymbol{y})\, ds_y \right) s_j = \sum_{m=0}^{n_h} \Gamma_m(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{z}_h) \left(\sum_j \int_{\partial D \cap C_h} g_m(\Delta \boldsymbol{y}) \psi_j(\boldsymbol{y})\, ds_y \right) s_j \tag{6}$$

となり, $\boldsymbol{x}$ だけに依存する係数 Γ_m と要素だけに依存する係数の内積となる。結局, クラスター C_k に含まれる点の数を K, C_h に含まれる要素数を L とすれば, 本来, 一回の繰り返しで $K \times L$ の計算が必要なところを $n \times (K+L)$ の計算ですむこととなる。したがって、K, L を n よりも十分に大きく取ることができれば, 計算の効率を上げることができる。

3 核関数の Tayler 展開

Rokhlin[2] は 2 次元ポテンシャル問題について, 速水 [1] は 2 次元弾性問題について, 核関数の Tayler 展開の例を挙げている。彼らはいずれも複素関数を利用して展開を行っているが、このような効率化が実際に必要とされるのは 3 次元問題においてであろう。ここでは、実数関数として (5) を直接に計算することを試みた。

多くの問題においては基本特異解 $G(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y})$ は距離 $r = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$ だけの関数である。そこで, r の関数 $f(r)$ について (5) の展開を行った。結果は次のようである。

$$f(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|) = f(r) + \sum_{n=1}^{n_h} \left(\sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} {}_nB_{2m} \frac{A_{n-m}}{r^m} a^{n-2m} b^{2m} \right) \tag{7}$$

ここに, $r = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_h|$, $a = \Delta y_i r_{,i}$, $b = \sqrt{\Delta y_i \Delta y_i}$ であり,

$${}_nB_{2m} = \frac{n!}{2^m m!(n-2m)!}, \qquad A_n = \sum_{m=0}^{n-1} \left[(-1)^m {}_{n+(m-1)}B_{2m} \frac{f^{(n-m)}}{r^m} \right] \tag{8}$$

である。

二重層核に対応するものとして, $\partial f / \partial n_y$ についても同様の展開を行うと、

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial n_y}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = \frac{\partial f}{\partial n_y}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_h) + \sum_{n=1}^{n_h} \Bigg(& \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left[{}_{n-1}B_{2m} c a^{n-(2m+1)} b^{2m} \right] \\ & + \sum_{m=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left[(n - (2m-1))_{n-1} B_{2(m-1)} d a^{n-2m} b^{2(m-1)} \right] \Bigg) \frac{A_{n-m}}{r^m} \end{aligned} \tag{9}$$

ここに, $c = n_i r_{,i}$, $d = n_i \Delta y_i$ である。

これらの表現は一般形であり問題の次元にかかわらずに成立する式である。実際に利用する場合には関数 $f(r)$ を具体的に与えて, A_n を評価しなければならない。たとえば, 2 次元ポテンシャル問題の場合には

$$G(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|} \tag{10}$$

であり、

$$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_h| > 2|\boldsymbol{z}_h - \boldsymbol{y}|, \qquad \boldsymbol{y} \in C_h \tag{11}$$

の条件のもとで (7), (9) は収束することが証明されている [2]。

この方法を利用した具体的な計算例については当日発表する。

参考文献

[1] 山田賢志, 速水謙: 多重極展開法による二次元静弾性解析の高速化. BEM・テクノロジー・コンファレンス論文集, 第 5 巻, pp.59-64. 1995.

[2] Rokhlin, V.: Rapid Solution of Integral Equations of Classical Potential Theory, J.Comput. Phys.. Vol.60. pp.187-207. 1985.