粘弾性面内波動問題の時間領域境界要素法による解析

福井大学工学部　学生員　○　井上耕一
福井大学工学部　正会員　　　福井卓雄
石　川　高　専　正会員　　　船戸慶輔

1　はじめに

粘弾性体の面内波動問題を時間領域境界要素法を用いて解析する。この研究の問題点は，基本特異解が解析的に得られない時間領域問題において，いかにして境界要素法を構成するかにある。ここでは，対応する周波数問題の基本解を数値的に積分変換してこの問題を解決した。この手法はすでに面外波動問題について適用されており [1]，良好な結果を得ている。同様の手法は，他の問題，たとえば，Biot 物体中の波動問題，に拡張できるものである。

以下では，微分に関する省略表現 $\dot{u} = \partial u/\partial t$ および $u_{,i} = \partial u/\partial x_i$ を用いる。また，$f * g$ はくりこみ積をあらわす。

2　粘弾性面内波動問題

媒質は等方等質の線形粘弾性体であるとする。ρ は媒質の質量密度，$K(t)$, $G(t)$ は体積変形およびせん断に対する緩和関数である。緩和関数は不遡及の公理 $K(t), G(t) = 0$, $-\infty < t < 0$ を満足するものとする。線形粘弾性面内波動問題の 2 次元領域 B およびその境界 ∂B における初期値境界値問題は，変位を $u_i(\boldsymbol{x}, t)$ として，つぎのように書ける。

$$G * du_{i,jj} + \left(K + \frac{G}{3}\right) * du_{j,ij} + X_i = \rho \ddot{u}_i \qquad \text{in } B,\ 0 < t < \infty \tag{1}$$

$$u_i(\boldsymbol{x}, 0) = u_i^0(\boldsymbol{x}), \quad \dot{u}_i(\boldsymbol{x}, 0) = v_i^0(\boldsymbol{x}) \qquad \text{in } B,\ t = 0 \tag{2}$$

$$u_i(\boldsymbol{x}, t) = \hat{u}_i(\boldsymbol{x}, t) \qquad \text{on } \partial B_1,\ 0 < t < \infty \tag{3}$$

$$s_i(\boldsymbol{x}, t) = n_j \sigma_{ij}(\boldsymbol{x}, t) = \hat{s}_i(\boldsymbol{x}, t) \qquad \text{on } \partial B_2,\ 0 < t < \infty \tag{4}$$

ここに，σ_{ij} は応力であり，n_j は境界 ∂B 上の単位法線ベクトルである。

3　時間領域境界要素法の定式化

境界要素法を定式化するためには，まず，基礎方程式の基本特異解が解析的に閉じた形で得られることが必要である。一般的な線形粘弾性モデルに対しては基本特異解がこのような形では得られないが，ここでは，仮に基本特異解が与えられており，その (超) 関数的な特性は弾性体のそれと同等なものと仮定して，時間領域境界要素法の定式化を行う。

境界積分方程式　基礎方程式の基本特異解 $G_{ij}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}|t)$ が与えられていると仮定する。初期値境界値問題に対して，一般化された Green 公式により，境界 ∂B の上で次のような積分公式があたえられる。

$$C(\boldsymbol{x}) u_i(\boldsymbol{x}, t) = \overset{\circ}{u}_i(\boldsymbol{x}, t) + \int_{\partial B} \left[G_{ij}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) * S_j(\boldsymbol{y}) - S_{ij}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) u_j(\boldsymbol{y}) \right] ds_y \tag{5}$$

ただし，C は $\boldsymbol{x}$ の位置によって決まる係数で，境界 ∂B が滑らかであると仮定すると，$\boldsymbol{x} \in B$ のとき 1，$\boldsymbol{x} \in \partial B$ のとき 1/2，それ以外のとき 0 の値をとる。第二基本特異解 $S_{ij}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}|t)$ は $G_{ij}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}|t)$ に対応する応力を $\sigma_{ikj}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}|t)$ とするとき，$S_{ij}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}|t) = n_k(\boldsymbol{y}) \sigma_{jki}(\boldsymbol{y}; \boldsymbol{x}|t)$ で定義される。

(5) は x が境界 ∂B 上にあるとき、境界関数 u, s の間に成立すべき条件を与え，境界上でこのどちらかの関数が与えられれば未知の関数に関する積分方程式となる。

離散化　境界要素法を導くために，積分公式 (5) における境界上の関数 u, s に適当な近似を導入する。いま，

$$u_i(\boldsymbol{x},t) = \sum_{A,k} \phi_A(\boldsymbol{x})\psi_K(t)u_i^{AK}, \qquad s_i(\boldsymbol{x},t) = \sum_{A,k} \phi_A(\boldsymbol{x})\psi_K(t)s_i^{AK} \tag{6}$$

と表し，(5) に代入すると，式の右辺は離散化されて，以下のようになる。

$$C(\boldsymbol{x})u_i(\boldsymbol{x},t) \simeq \overset{\circ}{u}_i(\boldsymbol{x},t) + \sum_{A,K}\left(\int_{\partial B}[G_{ij}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})*\psi_K(t)]\,\phi_A(y)ds_y\right)u_i^{AK}$$
$$-\sum_{A,K}\left(\int_{\partial B}[S_{ij}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})*\psi_K(t)]\,\phi_A(y)ds_y\right)s_i^{AK} \tag{7}$$

4　影響関数の計算法

波動方程式 (1) を $\mathcal{F}[f] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}\,dt$ により Fourier 変換すると

$$G^* u^*_{i,jj} + \left(K^* + \frac{G^*}{3}\right)u^*_{j,ij} + X^*_i = -\rho\omega^2 u^*_i \tag{8}$$

を得る。ここに，$G^* = -i\omega\mathcal{F}[G]$, $K^* = -i\omega\mathcal{F}[K]$ は複素弾性係数である。

方程式 (8) の基本特異解はよく知られていて，形式的に

$$G^*_{ij}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}) = \frac{i}{4G^*}\left[H_0^{(1)}(k_T r)\delta_{ij} + \frac{1}{k_T^2}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(H_0^{(1)}(k_T r) - H_0^{(1)}(k_L r)\right)\right] \tag{9}$$

と書ける。ここに，複素波数 k_L、k_T は縦波および横波の位相速度を $c_L = \sqrt{(K^* + 4/3G^*)/\rho}$, $c_T = \sqrt{G^*/\rho}$ とするとき，$k_L = \omega/c_L$, $k_T = \omega/c_T$ で与えられる。$G^*_{ij}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}) = \mathcal{F}[G_{ij}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})]$ であるから，(7) の影響関数は

$$G_{ij}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}) * \psi_K = \mathcal{F}^{-1}\left[G^*_{ij}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})\mathcal{F}[\psi_K]\right], \quad S_{ij}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}) * \psi_K = \mathcal{F}^{-1}\left[S^*_{ij}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})\mathcal{F}[\psi_K]\right] \tag{10}$$

と表すことができる。

基本特異解 (9) はそのテンソル性と波動特性を明確にして

$$G^*_{ij}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}) = \{E_{ij}\}^T[F]\{C^*\} \tag{11}$$

$$\{E_{ij}\} = \left\{\begin{array}{c}\delta_{ij}\\ r_{,i}r_{,j}\end{array}\right\}, \quad [F] = \begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}, \quad \{C^*\} = \frac{i}{4G^*}\begin{bmatrix}\kappa^2 H_0^{(1)}(k_L r)\\ H_0^{(1)}(k_T r)\\ -\dfrac{1}{\kappa_T r}\left(\kappa H_1^{(1)}(k_L r) - H_1^{(1)}(k_T r)\right)\end{bmatrix} \tag{12}$$

と書くことができる。ここに，$\kappa = k_L/k_T$ である。すなわち，基本解は，縦波の成分 $H_0^{(1)}(k_L r)$, 横波の成分 $H_0^{(1)}(k_T r)$ および遷移波の成分 $[\kappa H_1^{(1)}(k_L r) - H_1^{(1)}(k_T r)]/k_T r$ から構成されている。

これらの個々の波の成分に対応する影響関数 (10) の計算法については，すでに，面外波動問題において確立されており [1]，適切な数値積分を行えば十分な精度の係数が得られることが知られている。したがって，この場合にも同様の方法で影響関数を計算することが可能である。

解析手順の詳細と具体的な計算例については当日発表する。

参考文献

[1] 福井卓雄、船戸慶輔: 粘弾性面外波動問題の時間領域境界要素法による解析、境界要素法論文集、第 12 巻，pp.69-74, 1995.