渦膜法による流れの中の剛体の振動の解析

福井大学工学部　学生員　○　土居野 優
福井大学工学部　正会員　　福井 卓雄

1　はじめに

2次元非定常流れの中にバネで支持された剛体が存在するとき，流れによって生起する剛体の振動を渦膜法を用いて解析する。従来の研究 [1] では剛体の変位は微小であると仮定したが，ここでは変位は有限であるとして解析する。

2　流れの中の剛体の運動

ここで扱う問題は，流れの中の物体が流体力により運動をおこし，逆に，物体の運動による境界の位置の変化とその移動速度がまわりの流体の運動に新たな影響を与える，という連成問題である。以下に，2次元流れの中の剛体の運動について基礎式を与える。

剛体の運動　剛体の質量を $\boldsymbol{M}$，慣性モーメントを I_R，剛体を支持するバネのバネ定数を $\boldsymbol{K}$，K_R とする。流体から力 $\boldsymbol{P}$ およびモーメント Q が剛体に作用するものとし，それによる剛体の重心の変位を $\boldsymbol{X}$，回転角を Θ とすると剛体の運動方程式は

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P}, \qquad I_R\ddot{\Theta} + K_R\Theta = Q \tag{1}$$

となる。変数の上のドットは時間微分を示す。剛体上の位置 $\boldsymbol{x}$ における速度 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x})$ は次のように表される。

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}) = \dot{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{x} \times \dot{\Theta}\boldsymbol{k} \tag{2}$$

剛体まわりの流れ　流れは非圧縮であると仮定する。渦度を $\boldsymbol{\omega}$ とすると，流れの速度は次の関係を満足する。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0, \qquad \nabla \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \tag{3}$$

剛体が運動するとき，剛体境界上の点 $\boldsymbol{x}$ における速度は (2) より与えられる。境界上の法線方向の速度成分はこの速度により決定されるので，境界条件は次のようになる。$\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{s}$ は法線および接線ベクトルである。

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{V} = \boldsymbol{n} \cdot \dot{\boldsymbol{X}} - (\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{x})\dot{\Theta} \tag{4}$$

3　渦膜法による流れの解析

流れを，流れ関数 $\overline{\psi} = \psi_0 + \psi$ を用いて，$\boldsymbol{v} = \nabla \times \overline{\psi}\boldsymbol{k}$ で表す。ここに，ψ_0 は外部で与えられた流れである。渦度は剛体から発生する渦膜上にだけ存在すると仮定しその渦密度を γ とする。流れの支配方程式および境界条件は領域 D およびその境界 ∂D において，

$$\nabla^2\overline{\psi} = -\gamma \tag{5}$$

$$\overline{\psi} = \psi_M + c, \qquad \psi_M = -(\boldsymbol{x} \times \dot{\boldsymbol{X}}) \cdot \boldsymbol{k} - \frac{|x|^2}{2}\dot{\Theta} \tag{6}$$

となる。ここに，ψ_M は境界の運動 (2) を表し，境界条件に含まれる未定定数 c は，Kelvin の循環定理

$$\int_{\partial D} \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial n} ds = -\int_{\Gamma} \gamma ds \tag{7}$$

を用いて決定することができる。ここに, Γ は渦膜を表す。剛体に作用する流体力 $\boldsymbol{P}$ およびモーメント Q は

$$\boldsymbol{P} = \rho \int_{\Gamma} \gamma \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial s} \boldsymbol{s}\, ds + \rho \int_{\partial D} \left[\left(A - V_n \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial s} \right) \boldsymbol{s} + {V_n}^2 \boldsymbol{n} \right] ds \tag{8}$$

$$Q = \rho \int_{\Gamma} (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x}) \gamma \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial s}\, ds + \rho \frac{dc}{dt} \int_{\partial D} (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x})\, ds + \rho \int_{\partial D} \left[(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x}) \left(A - V_n \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial s} \right) - (\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{x}) {V_n}^2 \right] ds \tag{9}$$

となる。ρ は流体の密度, $A = (\boldsymbol{x} \times \ddot{\boldsymbol{X}}) \cdot \boldsymbol{k} + |x|^2 \ddot{\Theta}/2$, $V_n = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{V} = \boldsymbol{n} \cdot \dot{\boldsymbol{X}} - (\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{x}) \dot{\Theta}$ である。

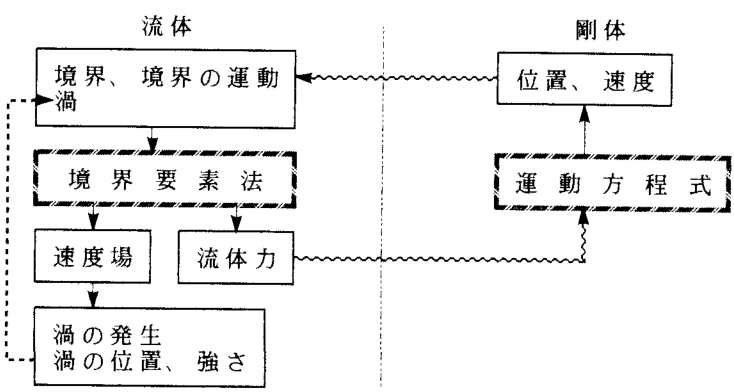
渦膜法においては (5) を満足する流れの積分表現を用いる [2]。Green の公式により, 流れ成分 ψ は

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \int_{\Gamma} G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}) \gamma(\boldsymbol{y}) ds_y + \int_{\partial D} G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}) \frac{\partial \psi}{\partial n}(\boldsymbol{y}) ds_y - \int_{\partial D} \frac{\partial G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})}{\partial n_y} (-\psi_0(\boldsymbol{y}) + \psi_M(\boldsymbol{y}) + c) ds_y \tag{10}$$

で与えられる。積分核 $G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})$ は対数ポテンシャルの核 $G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}) = (1/2\pi)\log(1/|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)$ である。上式において $\boldsymbol{x}$ を境界に近付けたものは, 境界値 $\partial\psi/\partial n$ に関する積分方程式となる。未知定数 c は (7) を付加条件とすることにより決定できる。

4 流れと剛体運動の連成解析

流れと剛体運動の連成解析は図の手順で行った。剛体の位置 (境界) と速度および渦の分布が決定されれば流れの場を境界要素法により決定できる。渦の発生と移動は渦膜法 [2] の手順により決定する。また, (8) (9) により決定される流体力を用いて, 剛体の運動方程式 (1) を解いて新しい位置と速度を決定する。剛体の運動の解析には (1) を差分表現して Euler 法を用いた。



詳細な解析結果については当日に報告する。

参考文献

[1] 福井 卓雄、小島 英郷: 渦膜法による流れの中の物体の振動の解析, 境界要素法論文集, **8**, pp.81-84 (1991)

[2] 登坂 宣好, 矢川 元基: 計算力学 [III] —計算力学と境界要素法—, 渦膜法による角柱群のまわりの流れの解析, pp.201–216, 養賢堂 (1992)