アイソパラメトリック要素を用いたE積分によるエネルギ解放率の数値解析

金沢大学大学院　　　　　　鱸　洋一
金沢大学工学部　　　正員　矢富盟祥
福井工業高等専門学校　正員　阿部孝弘

1．はじめに

破壊力学パラメータであるエネルギ解放率を求めるには，従来，周知のＪ積分がよく用いられているが，Ｊ積分では，き裂が直進して進む，すなわち，き裂と同方向に進む瞬間時のエネルギ解放率しか求められず，また，積分経路内が非均質であったり，応力ないしはひずみが不連続となる界面や複数の近接き裂が存在すると，経路独立性が失われる．これに対して筆者らの１人が提案したＥ積分[1)]では，全く任意の積分経路で，特定の進展き裂先端の任意方向折れ曲がり瞬間時のエネルギ解放率を有限要素法によって，求めることができる．筆者らはこれまでにＥ積分の有効性を数多く報告[2)]してきたが，Ｅ積分では，き裂先端近傍の応力場を用いずにエネルギ解放率を解析できるため，これまでの報告では定ひずみ三角形要素を用いてきた．しかし，き裂先端近傍の状況が非常に複雑な場合の解析や，計算時間，計算機容量の関係から，アイソパラメトリック要素を用いたほうがより有利であると考えられる．そこで本研究では，無限板中央にあるき裂の折れ曲がり時のエネルギ解放率をアイソパラメトリック要素用いて解析し，Wu の結果[3)]と比較検討することにより，アイソパラメトリック要素を用いることの有効性を考察する．

2．解析方法と解析モデル

Ｅ積分によるエネルギ解放率の表示は次式で与えられる[1)]．

$$E(\ell,\alpha)=\int_{\Gamma}\int_{0}^{\alpha}\left(\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial\ell}-\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial\ell}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial\beta}\right)d\beta\, ds \qquad (1)$$

ここに，$\mathbf{s}$ は応力ベクトル，$\mathbf{u}$ は変位ベクトル，ℓ はき裂長さ，Γ は領域の境界，α は荷重パラメータである．本研究では線形弾性体を対称としたため，Ｅ積分を線形弾性体に適用すると，α に関する積分は消え，さらに有限要素法を用いるために，き裂進展に関する微分項をき裂進展前と進展後の２点差分近似をすると，式（１）は次式のようになる．

$$E=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left\{\boldsymbol{s}_i(\ell)\cdot\frac{\boldsymbol{u}_i(\ell+\Delta\ell)-\boldsymbol{u}_i(\ell)}{\Delta\ell}-\frac{\boldsymbol{s}_i(\ell+\Delta\ell)-\boldsymbol{s}_i(\ell)}{\Delta\ell}\cdot\boldsymbol{u}_i(\ell)\right\}\Delta s \qquad (2)$$

ここに，n は経路における要素辺の数，Δs は各要素辺の長さ，$\Delta\ell$ はき裂進展長さである．また (ℓ) および $(\ell+\Delta\ell)$ は，それぞれき裂が進展する前と後の物理量を表している．本研究では，式（２）をアイソパラメトリック要素を用いた有限要素法に適用し，エネルギ解放率を求めた．

本研究では一様引張を受ける無限板中央にあるき裂の右先端が進展する場合を想定し，Fig.1 に示すようアイソパラメトリック要素を用いた縦横５４ｃｍの有限板の中央に長さ４ｃｍのき裂がある有限要素近似モデルを解析した．Fig.2 には，き裂先端近傍の要素分割を示す．Figs.1,2 における点線は積分経路である．PATH1,3,4,6 は要素中央に積分経路を設定したものであり，この場合，式（２）における応力および変位は要素内の経路上のガウスの積分点における値を用いる．また，PATH2,5 は要素辺上に積分経路を設定したものであり，式（２）における変位は節点変位を，応力は表面力に換算した節点表面力を用いる．PATH2,5 ではひずみエネルギが求められないため，Ｊ積分値は求められない．

また，き裂先端では Fig.2 に示すように，$-9\pi/10$ から $9\pi/10$ まで $\pi/10$ ごとに折れ曲がり角度を変えて計算できるようにした．ただし，折れ曲がれ角度はき裂が直進する方向から左周りを正の向きとした．

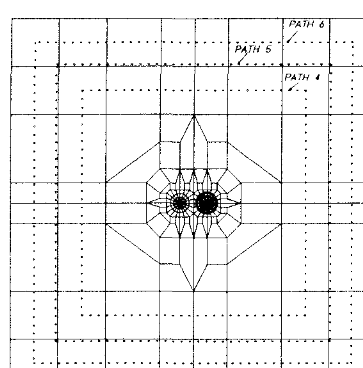

Fig.1 Finite element meshes and integral paths

3．結果と考察

Fig.3 は，き裂右先端が直進する瞬間時のエネルギ解放率を Figs.1,2 に示される積分経路ごとに計算した結果をであり，□が要素中央に積分経路をとったE積分による値，△がＪ積分による値であり，○が要素辺上に積分経路をとったE積分による値である．エネルギ解放率は無限板における解析解で除して正規化してある．Fig.3 からＪ積分による値は進展き裂先端のみを囲んだ PATH1,3 では解析解に近い値となるが，PATH4,6 のようにき裂全体を囲んだ経路ではすべてのき裂先端の特異性の影響が合計されてしまい零となってしまう．

これに対してE積分による値は，き裂先端近くで，要素中央に積分経路を取った PATH1,3 では解析解よりも非常に大きな値となるが，その他の経路ではほとんど解析解と一致する．PATH1,3 において大きな誤差が生じた理由は，き裂先端付近の要素の形状がいびつなために，節点変位を要素中央の経路上にあるガウスの積分点における変位に変換するときの誤差がE積分値に大きく影響したものと考えられる．このことから，アイソパラメトリック要素を用い，積分経路を要素中央に設定して，E積分値を求める場合には，要素形状が経路に対してほぼ対称な要素を選ぶ必要がある．しかし，要素辺上に積分経路を設定した PATH2,5 の場合の結果は，全く任意の積分経路で精度良くE積分によってエネルギ解放率を求めることができる．

Fig.4 は，き裂右先端が折れ曲がる瞬間時のエネルギ解放率を，要素辺上に積分経路を設定した一番外側の PATH5 を用いてE積分によって計算した結果とＷｕによる結果とを比較したものである．○がE積分による値，実線がＷｕによる値である．エネルギ解放率はき裂が直進する瞬間時の解析解で正規化してあり，折れ曲がり角度が負方向の値は，結果が正方向と同一となる対称性を確認したため，図では省略してある．Fig.4 から明らかなようにE積分による結果とＷｕによる結果はほとんど一致しており，き裂の折れ曲がり問題の解析にE積分を用いることの有効性が示されている．Ｊ積分ではき裂が直進することを仮定しているため，Ｊ積分をき裂の折れ曲がり問題に適用するには非常な困難を伴う．

また，Fig.4 から，折れ曲がり角度が大きくなるのにしたがって，エネルギ解放率は滑らかに減少していき，破壊靭性の等方性を仮定したとき，エネルギ解放率最大の破壊規準に従えば，き裂は直進することが明らかである．

4．おわりに

本研究では，E積分によるエネルギ解放率をアイソパラメトリック要素を用いた有限要素解析で求め，その有効性を検討した．その結果，アイソパラメトリック要素を用いた場合，積分経路を要素辺上に設定すれば，全く任意の積分経路で精度良くエネルギ解放率を求めることができ，き裂の折れ曲がり問題に対しても有効であることが確認できた．

参考文献

1) Yatomi,C:Int.J.Solids Structures, Vol.19,No.2, pp183~187, 1983

2) 例えば，阿部，橋本，矢富，小森:第２６回岩盤力学に関するシンポジウム論文集，pp66~70，1995

3) Wu,C.H.:J.Elasticity,pp235~237, 1978

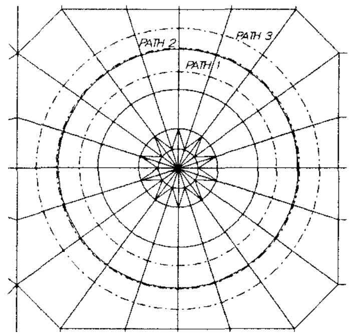

Fig.2 Finite element meshes and integral paths at the crack tip

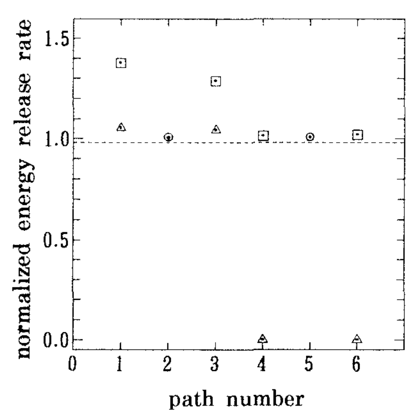

Fig.3 The energy release rate on several integral paths

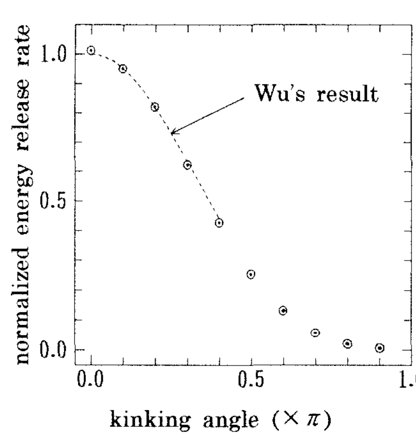

Fig.4 The variations of energy release rate at the onset crack kinking