

統一化塑性モデルにおけるNONLOCAL化手法に関する研究

名古屋大学	工学部	学生会員	山本	博稔
広島大学	工学部	正会員	大下	英吉
名古屋大学	工学部	正会員	田辺	忠顕

1. はじめに

田辺、WU²⁾らによって提案された統一化塑性モデルは、引張または圧縮性状、軟化または硬化挙動などを同一の数式で表現している。またコンクリート材料内部の不連続面間の応力伝達の損傷破壊過程は引張結合力の減衰を算定するパラメーターにより考慮されており、また、引張軟化挙動と鉄筋コンクリート挙動を関連づけることにより鉄筋コンクリート構造物の非線形問題を簡単に算定できる。さらに引張クラックなどによるコンクリートの圧縮強度の劣化も取り扱いやすくなると思われる。従って、鉄筋コンクリート構造物の非線形問題を解くための統一化された構成材料モデルとして期待できる。

しかしこの統一化塑性モデルは、実際のFEM解析において、未だひずみ軟化した時に生じるメッシュ依存性を解決するに至っていない。ここではモデルにより一般性を持たせる為に、NONLOCAL化という手法を用いてメッシュ依存性を無くすための定式化をした。

2. Nonlocal化された統一化塑性モデルの定式化

田辺らは、圧縮を受けるコンクリートの硬化及び軟化構成モデルを構築するために、損傷パラメーター $\omega(W^D)$ によって拡大あるいは縮小するDrucker-Pragerの降伏曲面を、以下のように修正した。(図-1)

$$f = f(\sigma_{ij}, \omega(W^P)) = J_2 - (k_f - \alpha_f I_1)^2 + (k_f - \alpha_f \eta)^2 = 0 \quad (1)$$

$$g = g(\sigma_{ij}, \omega(W^P)) = J_2 - (k_g - \alpha_g I_1)^2 + (k_g - \alpha_g \eta)^2 = 0 \quad (2)$$

ここで $I_1 = \sigma_{kk}, J_2 = 1/2 s_{ij} s_{ji}$ は応力テンソルの一次不変量および偏差応力の二次不変量である。また、 $\alpha_f, k_f, \alpha_g, k_g, \eta$ は材料定数であり、以下のように定義している。

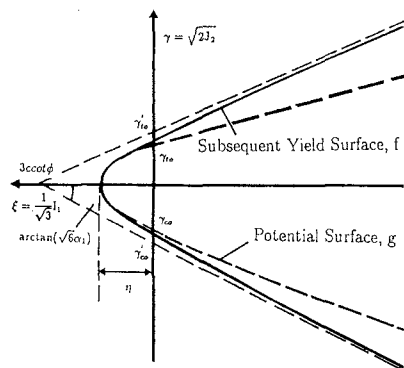
$$\begin{aligned}\alpha_f &= \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 + y \sin \phi_1)}, k_f = \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 + y \sin \phi_1)} \\ \alpha_g &= \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 + \nu \sin \phi_1)}, k_f = \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 + \nu \sin \phi_1)}, \eta = \eta_0 \exp\left(-\frac{\omega}{b}\right)\end{aligned}\quad (3)$$

ϕ は内部摩擦角、 ϕ_1 は材料定数とする。 ϕ は dilatancy 角として定義され、 $\phi = \phi_1$ の時には $f = g$ となり、関連流れ則が成立する。また y は次式のように定義している。

$$y = \sqrt{a(\cos 3\theta + 1.00) + 0.01} - 1.10 \quad (4)$$

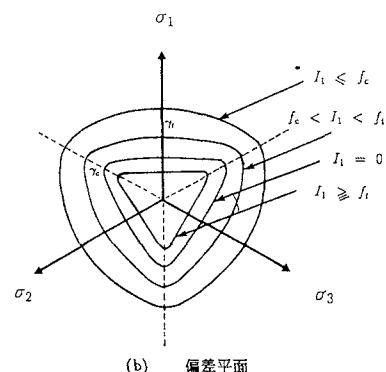
$$r = \begin{cases} 3.14 & (I_1 \leq f'_c) \\ 2.93 \cos(I_1 \cdot \pi / f_c) + 6.07 & (f'_c \leq I_1 \leq f_t) \\ 9.0 & (I_1 > f_t) \end{cases} \quad (5)$$

ところで、一般に等方ひずみ硬化塑性理論では、全体のひずみ増分は、以下のように定義されている。



$$\begin{aligned} \gamma'_{ie} &= \frac{2\sqrt{6}c \cos \phi}{3 + (1+r) \sin \phi_1} & \gamma_{ie} &= \frac{2\sqrt{2}\sqrt{(3 \cos \phi)^2 - (3c \cos \phi - \eta \sin \phi)^2}}{\sqrt{3}(3 + (1+r) \sin \phi_1)} \\ \gamma'_{eo} &= \frac{2\sqrt{6}c \cos \phi}{3 - \sin \phi_1} & \gamma_{eo} &= \frac{2\sqrt{2}\sqrt{(3 \cos \phi)^2 - (3c \cos \phi - \eta \sin \phi)^2}}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi_1)} \end{aligned}$$

(a) 子午線面



図一1 提案する降伏面

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (6)$$

塑性ひずみ増分は、塑性ポテンシャル関数を導入し、(7)式のように表される。

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad (7)$$

また、弾性ひずみ増分は弾性マトリクス D_{ijkl}^e を用いて次のように応力増分と関連づけられる。

$$\dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl}^e \dot{\epsilon}_{ij}^e \quad (8)$$

ここでNONLOCALなひずみ $\dot{\epsilon}^p$ を以下の式によって定義する。

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p(x) = \frac{1}{V_r(\tilde{x})} \int_V g(\tilde{s}) \dot{\epsilon}_{ij}^p(\tilde{x} + \tilde{s}) dV \quad (9)$$

ここで $g(\tilde{s})$ は重み関数である。またNONLOCALな有効塑性ひずみを (10) 式によって表す。

$$\dot{\gamma}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \left(\dot{\epsilon}_{ij}^p \right)^T \cdot \dot{\epsilon}_{ij}^p} \quad (10)$$

このときコンシステンシー状態は f の全微分で表され、

$$\begin{aligned} \dot{f} &= \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \omega} \dot{\omega} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} + \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_f} \frac{\partial \alpha_f}{\partial \omega} + \frac{\partial f}{\partial k_f} \frac{\partial k_f}{\partial \omega} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \omega} \right) \dot{\omega} \\ &= 2 \left[(I_1 - \eta) (k_f - \alpha_f (I_1 + \eta)) \frac{\partial \alpha_f}{\partial \omega} + \alpha_f (I_1 - \eta) \frac{\partial k_f}{\partial \omega} - (k_f - \alpha_f \eta) \frac{\partial \eta}{\partial \omega} \right] \frac{\partial \omega}{\partial W^p} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

ここで $\omega = \frac{\beta}{\sigma_e \epsilon_0} \int dW^p = \frac{\beta}{\epsilon_0} \int d\dot{\gamma}^p$, $\sigma_e = \frac{\dot{W}^p}{\dot{\gamma}^p} = \frac{\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p}{\dot{\gamma}^p}$, $W^p = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p$ であり、 β は材料定数、 ϵ_0 は任意の定数

であるが、0.002の値に固定する。 σ_e は有効応力、 W^p は塑性仕事を表す。また (11) において

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_f}{\partial \omega} &= \frac{2 \cos \phi}{\sqrt{3} (3 + \gamma \sin \phi_1)} \frac{\partial \phi}{\partial \omega}, \quad \frac{\partial k_f}{\partial \omega} = \frac{-6c \sin \phi}{\sqrt{3} (3 + \gamma \sin \phi_1)} \frac{\partial \phi}{\partial \omega} - \frac{12c_0 m^2 \omega}{\sqrt{3} (3 + \gamma \sin \phi_1)} e^{-(m\omega)^2} \cos \phi, \quad \frac{\partial \eta}{\partial \omega} = -\frac{\eta_0}{b} \exp\left(-\frac{\omega}{b}\right) \\ \frac{\partial \phi}{\partial \omega} &= \frac{(1-\omega)(\phi_f - \phi_0)}{\sqrt{2\omega - \omega^2}} (\omega \leq 1), \quad \frac{\partial \phi}{\partial \omega} = 0 (\omega > 1), \quad \frac{\partial \omega}{\partial W^p} = \frac{\beta}{\sigma_e \epsilon_0} \end{aligned} \quad (12)$$

ここで(6), (7), (8), (9), (10), (11)式から

$$\dot{\lambda}(x) = \frac{\tilde{n}^T D^e \tilde{\epsilon}}{\tilde{n}^T D^e \tilde{m}} + \frac{1}{\tilde{n}^T D^e \tilde{m}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \omega} \cdot \frac{\beta}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{V(\tilde{x})} \sqrt{\frac{2}{3} \left(\int_V g(\tilde{s}) \dot{\lambda}(\tilde{x} + \tilde{s}) \tilde{m}(\tilde{x} + \tilde{s}) dV \right)^T \cdot \left(\int_V g(\tilde{s}) \dot{\lambda}(\tilde{x} + \tilde{s}) \tilde{m}(\tilde{x} + \tilde{s}) dV \right)} \quad (13)$$

ただし $\tilde{n} = \frac{\partial f}{\partial \sigma}$, $\tilde{m} = \frac{\partial g}{\partial \sigma}$, $\frac{\partial f}{\partial \omega} = \frac{\partial f}{\partial \alpha_f} \frac{\partial \alpha_f}{\partial \omega} + \frac{\partial f}{\partial k_f} \frac{\partial k_f}{\partial \omega} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \omega}$ である。

3. FEM解析に対する適用

実際にFEM解析に適用する場合、塑性域において λ を直接求めることはできない。よって(13)式を(14)式のように収束計算の形にして求めなければならない。積分をsummationの形にして、簡単のために一次元のモデルを考えると、

$$\dot{\lambda}(x) = \frac{\tilde{n}^T D^e \tilde{\epsilon}}{\tilde{n}^T D^e \tilde{m}} + \frac{1}{\tilde{n}^T D^e \tilde{m}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \omega} \cdot \frac{\beta}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{V(x_i)} \sqrt{\frac{2}{3} \left(\sum_{j=0}^n g(s_j) \dot{\lambda}^{k-1}(x_i + s_j) \tilde{m}(x_i + s_j) \right)^T \cdot \left(\sum_{j=0}^n g(s_j) \dot{\lambda}^{k-1}(x_i + s_j) \tilde{m}(x_i + s_j) \right)} \quad (14)$$

発表時には同じ試験体においてメッシュの切り方を変え、LOCALのままで計算をした例とNONLOCALにして計算をした例とを比較し、NONLOCAL化の評価を行う予定である。

参考文献

- 1) R. de Borst, H.-B. Muhlau, J. Pamin and L. J. Sluys: Computational Modelling of Localisation of Deformation. Computational Plasticity Fundamentals and Applications Part I
- 2) 田辺 忠顕・呉 智深・余 国雄、コンクリート材料統一塑性モデル、土木学会論文集No. 496/V-24, 1994, 8