多孔質体における透水問題の均質化手法による解析的研究

名古屋大学工学部地圏環境工学専攻　学生会員　伊藤貴宏
名古屋大学工学部地圏環境工学教室助教授　正会員　市川康明

1. はじめに

本解析では多孔質体モデルを骨格系とその間隙から成る周期性構造を有すると仮定する。透水は、この間隙部分で起こるものとし、まず微視的単位周期構造体（ユニットセル）内での透水解析を行っている。ここでは、非圧縮 Stokes 流の仮定を用いて運動方程式を変形し、流速、圧力、物体力に対して周期性の条件を導入して弱形式に至っている。質量保存則から導かれた連続の式にも周期性の条件を導入し、弱形式を作っている。これらを有限要素法で解いて微視的特性を考慮にいれた巨視的な透水係数を求めている。そして、この透水係数を用いて、Darcy 則から平均流速を求めることにより、微視的特性を考慮した実流速を考察する。

2. 非圧縮 Stokes 流の支配方程式

ユニットセル内における非圧縮 Stokes 流の支配方程式に対して均質化手法を施し、これらを弱形式化している。

2.1. 均質化手法の導入

ユニットセルの流体部分に非圧縮 Stokes 流の仮定を用いると、質量保存則、運動量保存則は次式で与えられる。

$$\nabla\cdot\boldsymbol{V}^{\varepsilon}=0,\quad -\nabla P^{\varepsilon}+\nabla\cdot\mu\nabla\boldsymbol{V}^{\varepsilon}+\boldsymbol{f}^{\varepsilon}=\mathbf{o}\quad \text{in}\quad Y_F\quad,\qquad \boldsymbol{V}^{\varepsilon}=\mathbf{o}\quad\text{on}\quad\Gamma \tag{1),(2),(3}$$

ここで $\boldsymbol{V}^{\varepsilon}$ は流速、P は圧力、μ は粘性係数、$\boldsymbol{f}$ は物体力で、Y_F は流体領域、Γ は固体流体境界領域である。つぎに $\boldsymbol{V}^{\varepsilon}, P^{\varepsilon}, \boldsymbol{f}^{\varepsilon}$ について (1),(2),(3) 式を満たす解を以下の ε に関する摂動展開の形で探すことを考える。

$$\boldsymbol{V}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x})=\varepsilon^2\boldsymbol{V}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\varepsilon^3\boldsymbol{V}^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\cdots\quad,\qquad P^{\varepsilon}(\boldsymbol{x})=P^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\varepsilon P^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\cdots$$

$$\boldsymbol{f}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}^0(\boldsymbol{x})+\varepsilon\boldsymbol{f}^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\cdots \tag{4),(5),(6}$$

これを (1),(2),(3) 式に代入し、微分が

$$\frac{\partial}{\partial x_i}=\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y_i}+\frac{\partial}{\partial x_i}\quad,\qquad \frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_i}=\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial y_i\partial y_i}+\frac{2}{\varepsilon}\frac{\partial^2}{\partial y_i\partial x_i}+\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_i} \tag{7}$$

であることに注意すれば、(4),(5),(6) 式の ε^3 以上の項は全て消え、各保存則は次のように書き換えられる。

- 質量保存則　$\nabla_y\cdot\boldsymbol{V}^0=0,\quad \nabla_x\cdot\boldsymbol{V}^0+\nabla_y\cdot\boldsymbol{V}^1=0\quad\text{in}\ Y_F$　(8),(9)
- 運動量保存則　$\nabla_y P^0=\mathbf{o}\Rightarrow P^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=P^0(\boldsymbol{x})+c(\boldsymbol{x}),\quad -(\nabla_y P^1+\nabla_x P^0)+\mu\triangle_y\boldsymbol{V}^0+\boldsymbol{f}^0=\mathbf{o}\quad\text{in}\ Y_F$　(10),(11)
- 境界条件　$\boldsymbol{V}^0=\mathbf{o}\quad\text{on}\quad\Gamma$　(12)

2.2. 各保存則の弱形式化

2.2.1. 運動量保存則

(2.12) 式から仮想仕事式は次式で与えられる。

$$\int_{Y_F}[-(\nabla_y P^1+\nabla_x P^0)+\mu\triangle_y\boldsymbol{V}^0+\boldsymbol{f}^0]\cdot\boldsymbol{w}\,dy=0\qquad \forall\boldsymbol{w}\in V_y \tag{13}$$

ただし、$V_y=\{\boldsymbol{w}\in(H^1(Y_F))^3, \boldsymbol{w}\ \text{is}\ \boldsymbol{Y}\text{-periodic}, \boldsymbol{w}=\mathbf{o}\quad\text{on}\quad\Gamma, \nabla_y\cdot\boldsymbol{w}=\mathbf{o}\}$ そして、(2.14) 式に ∂Y の周期性、$\boldsymbol{w}$ の定義を導入し、発散定理を用いて、さらに $(\boldsymbol{f}^0-\nabla_x P^0)$ で正規化すると結局、

$$\mu\int_{Y_F}\frac{\partial\boldsymbol{v}^i}{\partial\boldsymbol{y}}\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial\boldsymbol{y}}dy=\int_{Y_F}w_i\,dy\qquad\forall w_i\in V_y \tag{14}$$

となる。ここで

$$\boldsymbol{v}^i=\frac{\boldsymbol{V}^0}{f_i^0-\frac{\partial P^0}{\partial x_i}}\qquad\left(\boldsymbol{V}^0=\left(f_i^0-\frac{\partial P^0}{\partial x_i}\right)\boldsymbol{v}^i\right) \tag{15}$$

であり、均質化手法の中ではこれを特性変位関数とよび、(14) 式が、この特性変位関数を求めるための弱形式となる。

2.2.2. 質量保存則

(14) と同様に (9) 式の弱形式をを正規化すると最終的に、次式が得られる。

$$\int_Y \boldsymbol{v}^i \cdot \boldsymbol{\nabla w} dy = 0 \tag{16}$$

と表せる。(14) 式と (16) 式を同時に満たす $\boldsymbol{v}^i$ を求めることになるが、これについては現在有限要素法を用いて解析中である。つぎに Darcy 則により平均流速を $\widetilde{\boldsymbol{V}_j^0}$ とすると、

$$\widetilde{\boldsymbol{V}_j^0} = K_{ij}\left(f_i - \frac{\partial P^0}{\partial x_i}\right) \quad , \qquad K_{ij} \equiv \widetilde{v_j^i} = \frac{1}{|Y|}\int_Y v_j^i dy \qquad (17),(18)$$

であり、求めた $\boldsymbol{v}^i$ をユニットセル内で体積平均をとれば、これはすなわち透水係数であることがわかる。ここに $|Y|$ はユニットセル内の体積を表す。

2.3. 実流速の導出

つぎに圧力 P^0 , 実流速 $\boldsymbol{V}^0$ を求める。(9) 式はユニットセル内で体積平均をとると、以下の様になる。

$$\boldsymbol{\nabla}_x \cdot \widetilde{\boldsymbol{V}^0} + \widetilde{\boldsymbol{\nabla}_y \cdot \boldsymbol{V}^1} = 0 \quad \text{in } Y_F \tag{19}$$

$$(\widetilde{\boldsymbol{\nabla}_y, \boldsymbol{V}^1}) = \frac{1}{|Y|}\int_{Y_F}\frac{\partial V_i^1}{\partial y_i}dy = \frac{1}{|Y|}\int_{\partial Y_F} V_i^1 n_i ds = 0 \tag{20}$$

ここで、$\partial Y_F = \partial Y + \Gamma$ であり、 ∂Y 上では V_i^1 の Y に関する周期性により、また Γ 上では流体の出入りが起こらないと仮定しているので (20) 式は 0 になる。したがって (19) 式は第 1 項が残り、さらに (17) 式より

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[K_{ij}\left(f_i - \frac{\partial P^0}{\partial x_j}\right)\right] = 0 \tag{21}$$

となり、(21) 式に (17) 式で求めた K_{ij} を代入すればミクロを考慮したマクロな圧力 P^0 が導かれる。この P^0 を (15) 式に代入すれば、 P^0 と同様マクロな実流速 $\boldsymbol{V}_0$ が得られる。

3. 数値解析

前章で導出した各保存則の支配方程式の弱形式 (14) 式と (16) 式を同時に満たす解 $\boldsymbol{v}^i$ を得るため、有限要素法を導入して離散化を行い、近似解を求める仮定について述べる。
未知量 $\boldsymbol{v}^k$ と任意関数 $\boldsymbol{w}$ に形状関数を導入し離散化すると、これらを解くための方程式は以下の様なマトリクス表示ができる。

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K} & \boldsymbol{P}^T \\ \boldsymbol{P} & \boldsymbol{o} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \boldsymbol{v}^i \\ \boldsymbol{m} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{o} \end{Bmatrix} \tag{22}$$

なお、(22) 式中の各テンソルの意味は以下の通りである。

$$\boldsymbol{K} = \int_{Y_F} \mu \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{B} dy \tag{23}$$

$$\boldsymbol{P} = \int_{Y_F} \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{N} dy \tag{24}$$

$$\boldsymbol{F} = \int_{Y_F} \boldsymbol{N}^i dy = \int_{Y_F} \boldsymbol{N}^T \begin{Bmatrix} 2-k \\ k-1 \end{Bmatrix} dy \quad , \qquad k = 1,2 \tag{25}$$

$\boldsymbol{m}$: Lagrange multiplier