均質化手法による岩盤の粘弾性解析

名古屋大学大学院　学生会員　辻　浩一
名古屋大学工学部　正会員　市川康明

1. はじめに

原子力発電、核燃料など、新エネルギー開発の進む近年、核廃棄物の安全な処理も緊急課題である。それに伴い、すぐれた遮へい性を有する岩盤の研究が、ますます重要になっている。また、核廃棄物の危険度が非常に高く、許容誤差も極めて小さくなくてはならない。それゆえ、ミクロな構造にまで考慮に入れた、精度の高い解析が要求される。均質化手法は、ミクロ構造を反映したマクロの挙動を記述することのできる数学理論である。ここでは、結晶質岩盤の解析に適応する。ただし、構成モデルとしては、時間依存性問題の基本的な形式である粘弾性挙動を用いる。

2. 粘弾性対応原理と均質化手法

長期的な応力緩和を想定して、静的な強制変位問題を考える。構造物は複合結晶質岩盤で、構成材料は５要素等方マクスウェル体と仮定する。

2.1 ラプラス空間上の釣合問題

$$\text{支配方程式}: \frac{\partial \hat{\sigma}^\varepsilon_{ij}}{\partial x_j} + \hat{f}^\varepsilon_i = 0 \quad \text{in} \quad \Omega^\varepsilon, \qquad \text{境界条件}: \hat{u}^\varepsilon_i = \hat{u}_i \quad \text{on} \quad \Gamma_u \tag{1}$$

ここに、$\hat{u}^\varepsilon_i = \hat{u}^\varepsilon_i(\boldsymbol{x}, p), \hat{f}^\varepsilon_i = \hat{f}^\varepsilon_i(\boldsymbol{x}, p)$ (p:ラプラス変換パラメータ) である。

$$\mathrm{u}-\varepsilon\text{関係}: \hat{\varepsilon}_{ij}(\hat{\boldsymbol{u}}^\varepsilon) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \hat{u}^\varepsilon_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}^\varepsilon_j}{\partial x_i}\right), \qquad \text{構成式}: \hat{s}(p) = 2p\hat{G}(p)\hat{e}(p), \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}}(p) = 3p\hat{K}(p)\hat{\varepsilon}(p) \tag{2}$$

全応力、全ひずみ関係は、ラメの定数:$\hat{\lambda} = \hat{K} - \frac{2}{3}\hat{G}$を用いて

$$\hat{\sigma}_{ij}(p) = p(2\hat{G}\hat{\varepsilon}_{ij} + 3\hat{\lambda}\hat{\varepsilon}_{rs}\delta_{rs}\delta_{ij}) = p[2\hat{G}\delta_{ri}\delta_{sj} + 3\hat{\lambda}\delta_{ij}\delta_{rs}]\hat{\varepsilon}_{rs} = p\hat{D}_{ijrs}\hat{\varepsilon}_{rs} = \hat{M}_{ijrs}\hat{\varepsilon}_{rs} \tag{3}$$

2.2 ユニットセル問題と巨視問題

ラプラス空間上での$\hat{\boldsymbol{u}}^\varepsilon$を$\varepsilon$について漸近展開する。[1)]

$$\hat{u}^\varepsilon_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, p) = \hat{u}^0_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, p) + \varepsilon \hat{u}^1_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, p) + \varepsilon^2 \hat{u}^2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, p) + \cdots, \quad \hat{u}^\alpha_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, p) = \hat{u}^\alpha_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{Y}, p) \ (\alpha = 0, 1, \cdots) \tag{4}$$

(4), および微分演算子:$\dfrac{d}{dx_i} = \dfrac{\partial}{\partial x_i} + \dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{\partial}{\partial y_i}$ を (1) に導入することにより、以下の２種類の問題が得られる。

(a) ユニットセル問題

$\hat{u}^1_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, p) = -\hat{\chi}^{kl}_i(\boldsymbol{y}, p)\dfrac{\partial \hat{u}^0_k}{\partial x_l} + C_i(\boldsymbol{x})$ と定義される特性変位関数 $\hat{\chi}^{kl}_i(\boldsymbol{y}, p)$ を導入して、以下の式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial y_j}\left[\hat{M}^\varepsilon_{ijkl}\left(\delta_{rk}\delta_{sl} - \frac{\partial \hat{\chi}^{rs}_k}{\partial y_l}\right)\right] = 0 \tag{5}$$

(b) 巨視問題

ユニットセルYの平均化演算子:$\langle\phi\rangle = \dfrac{1}{|Y|}\displaystyle\int_Y \phi dy$ を用いて、巨視問題は次のようになる。

$$\frac{\partial \langle \hat{\sigma}^1_{ij} \rangle}{\partial x_j} + \langle \hat{f}_i \rangle = 0, \qquad \hat{u}^0_i = \hat{u}_i \quad \text{on} \quad \Gamma_u, \qquad \langle \hat{\sigma}^1_{ij} \rangle = \hat{M}^h_{ijkl}\left(\frac{\partial \hat{u}^0_k}{\partial x_l}\right) \tag{6}$$

$$\hat{M}^h_{ijkl}(\boldsymbol{y}, p) = \frac{1}{|Y|}\int_Y \hat{M}^\varepsilon_{qnpm}(\boldsymbol{y}, p)\left[\delta_{qi}\delta_{nj} - \frac{\partial \hat{\chi}^{ij}_q}{\partial y_n}\right]\left[\delta_{pk}\delta_{ml} - \frac{\partial \hat{\chi}^{kl}_p}{\partial y_m}\right] dy \tag{7}$$

3. 均質化マクロ応力、ミクロ応力のラプラス逆変換

均質化応力緩和関数を近似的にディィレクレ級数和で以下のように表す。

$$\langle \sigma_D(t) \rangle = \langle \boldsymbol{S}_0 \rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle \boldsymbol{S}_i \rangle exp(-\gamma_i t) \qquad \boldsymbol{S}_0 : 定常応力, \gamma_i : 逆変換パラメータ, \boldsymbol{S}_i : 緩和応力係数 \tag{8}$$

厳密解 $\langle \sigma_1(t) \rangle$ のラプラス変換と近似解 $\langle \sigma_D(t) \rangle$ のラプラス変換が、指定されたn個のパラメータ $p = \gamma_i$ の点において一致するとき、精度のよい逆変換近似が得られる。そこで、γ_i について、最小二乗法を用いて $\boldsymbol{S}_i$ を決定する。その際、パラメータ γ_i の選び方が重要である。そこで、定常応力 $\langle \sigma_\infty \rangle$ 、初期応力 $\langle \sigma_0 \rangle$ は、それぞれ $t = \infty, t = 0$ のときの弾性問題として、均質化手法で計算できることから、$\langle \sigma_\infty \rangle, \langle \sigma_0 \rangle$ を条件として、パラメータを決定する。(8) において逆数 "$\frac{1}{\gamma_i}$" は、均質化された遅延時間に相当する。そこで、応力緩和関数を図 3.1 のように緩和影響域を仮定し、2個のパラメータ γ_1, γ_2 を決定する。緩和スペクトルの定理より、スペクトルの極値はそれぞれの材料物性の遅延時間の近傍に存在する。[2]それをもとに初期パラメータを決め、準ニュートン法により γ_i を推定する。得られた均質化遅延時間を用いて、同様にミクロ応力 $\sigma_1(t)$ のディィレクレ近似 $\sigma_D(t)$ を行う。

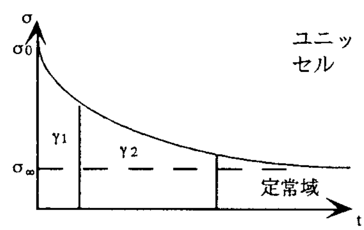

図 3.1 パラメータの緩和影響域

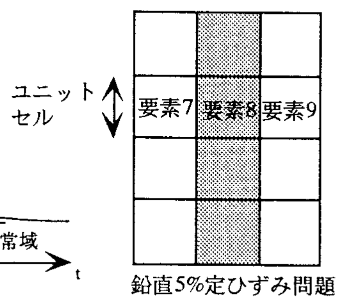

図 3.2 解析材料の図

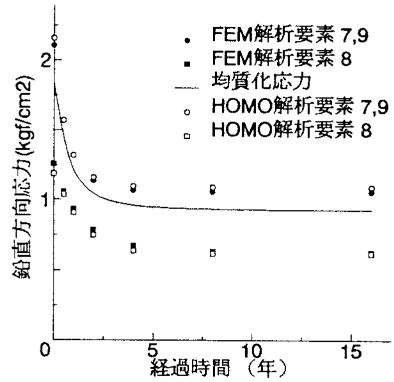

図 3.3 FEM解析と均質化手法解析

4. 解析結果

2種類の材料を含む周期的な複合材料で、刺激応答理論によるFEM解析と均質化手法による対応原理を用いた解析を比較した。材料モデルを図3.2に、その結果を図3.3に示す。均質化された応力曲線が、材料ごとにばらついた応力分布をほぼ平均している。これより、推定して求めた均質化遅延時間が、ミクロな周期構造を反映した有意な物性値となりうることがわかる。

5. 考察および今後の課題

1) 対応原理と均質化手法を導入し、ミクロな周期構造を考慮にいれた粘弾性挙動を表現できた。

2) 有意な物性値として、ミクロ構造を反映した均質化遅延時間が得られる。

3) クリープ挙動とリラクゼーション挙動は等価[3]なので、同様な手法を用いて、クリープも解析可能である。

4) 粘性挙動から生じる異方性およびその変化を今後考察する予定である。

6. 参考文献

1) E.Sanchez-Palencia:Non-homogeneous media and vibration theory;Lecture notes in physics,Springer-Verlag,1980

2) 草間孝志、三井康司、吉田俊弥:数値ラプラス逆変換による線形粘弾性解析, 土木学会論文報告集, 第 292 号,pp.41-52,1979 年 12 月

3) 赤木知之:レオロジーモデルに関する若干の考察, 藤岡一男教授退官記念論文集,1977 年