線形計画法による地盤の安定解析

○ 名古屋大学大学院　学生会員　山田　英司
名古屋大学工学部　正会員　大塚　悟
名古屋大学工学部　正会員　松尾　稔

1. はじめに

荷重方向の変化する繰り返し荷重に対する土構造物の安定性評価にシェイクダウン解析がある。荷重を単一方向に限定すると通常の安定解析に対応する。区分的に線形な降伏関数を使用すると有限要素離散化と線形計画法により容易に安定計算を行うことができる。本研究では解析手法の適用性と得られる解の性質について検討する。平面ひずみ条件における地盤の非排水支持力問題を例に取り上げ、弾性係数と初期応力の支持力に及ぼす影響について考察する。

2. 線形計画法による定式化

Melan の定理（シェイクダウン解析）に基づき構造物の安定性を評価する。降伏関数には次式の区分線形近似された降伏関数を用いる。

$$f(\boldsymbol{\sigma}(t)) = N^T\boldsymbol{\sigma}(t) - \boldsymbol{K} = N^T(\boldsymbol{\sigma}^E(t) + \boldsymbol{\sigma}^R(t)) - \boldsymbol{K} \leq \boldsymbol{o} \tag{1}$$

ここに、f：降伏関数、N：降伏関数の外向き法線ベクトルの集合マトリックス、$\boldsymbol{K}$：せん断力の大きさを表すベクトルである。実際の応力 $\boldsymbol{\sigma}(t)$ は、$\boldsymbol{\sigma}^E(t)$：荷重 $\boldsymbol{F}(t)$ に対する弾性応力、と $\boldsymbol{\sigma}^R(t)$：外力$=\boldsymbol{o}$ とつり合う残留応力、に分割する。Melan の定理はあらゆる荷重に対して式 (1) を満足する $\overline{\boldsymbol{\sigma}}^R$（定数）を得る時に、構造物が安定であることを保証する。時間的に変化する $N^T\boldsymbol{\sigma}^E(t)$ を式 (2) に示すようにベクトル $\boldsymbol{M}$ に変換すると、荷重領域 Δ 内の任意の繰返し荷重の影響は全てこのベクトル $\boldsymbol{M}$ によって表すことができる。

$$\boldsymbol{M} = \max\{N^T\boldsymbol{\sigma}^E(t) \mid B^T\boldsymbol{\sigma}^E(t) = \boldsymbol{F}(t)\ ,\boldsymbol{F}(t)\ in\ \Delta\} \tag{2}$$

土構造物がシェイクダウンする限界荷重領域を $\alpha\Delta$（α :荷重係数）とすると、この荷重係数 α を用いて Melan の定理は次式のような線形計画問題として表される。

$$s = \max\{\alpha \mid \alpha\boldsymbol{M} + N^T\overline{\boldsymbol{\sigma}}^R \leq \boldsymbol{K}\ ,\ B^T\overline{\boldsymbol{\sigma}}^R = \boldsymbol{o}\} \tag{3}$$

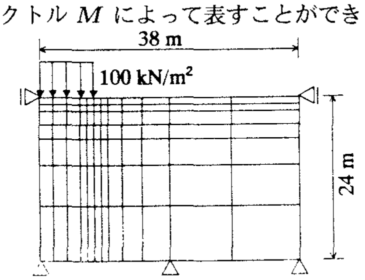

図.1 有限要素メッシュと荷重条件

3. 弾性係数の及ぼす支持力への影響

地盤材料を完全塑性体にモデル化すると支持力は唯一に定められる。この解の唯一性は、Drucker の仮説に従う材料の場合に一般的に証明することができる（例えば、北川,1979)。弾完全塑性体の場合にも、Drucker の仮説に従えば同様の解の唯一性が成立する。シェイクダウン解析では弾性解析に基づく構造物内の応力分布に基づいて塑性解析を行うために、弾性係数によらずに支持力が唯一に得られる保証はない。そこで弾性係数が等方性、直交異方性の場合について弾性係数 E ならびにポアソン比 ν を変化させて支持力の唯一性について検討した。解析に用いた有限要素メッシュと荷重条件を図.1 に示す。また、降伏関数には区分線形近似した Mises の降伏関数を用いる。

まず弾性係数が等方性の場合に表.1 のように弾性係数 E、ポアソン比 ν を変化させて支持力の変化を調べた。表.1 の解析結果から分かるように弾性係数 E の変化は支持力に影響を与えない。ポアソン比 ν が大きくなると若干支持力も大きくなるが、ポアソン比が$\nu \leq 0.49$ ではほとんど差異が見られない。ところが、ポアソン比が $\nu > 0.49$ ではポアソン比に応じて支持力が著しく増加する結果となった。この理由を明確に断定することは難しいが、ポアソン比 ν=0.5 の材料は非圧縮性であり、弾性計算自身の精度に若干の問題もあると考えられる。しかしながら、通常のポアソン比では解の唯一性が全般的に成立していることが確かめられた。

次に、弾性係数が直交異方性の場合について表.2 のように弾性係数とポアソン比を変化させて支持力の変化を調べた。表.2 の解析結果から分かるように、直交異方性を示す場合は弾性係数、ポアソン比の変化によらず支持力はどの場合もほぼ 52 ～ 53 kN/m^2 付近に分布し、等方性を示す場合とほぼ同じような支持力が得られた。このことからシェイクダウン解析により得られる地盤の支持力は、弾性係数の等方性、直交異方性の区別なく解の唯一性が成立すると言える。

4. 初期応力の及ぼす支持力への影響

初期応力が土構造物の安定性に及ぼす影響を検討するため、図.2 の要素試験を用いて考察する。材料のモデル化、初期応力状態を変えて限界荷重（支持力）の変化を調べた。表.3 に c 材の場合の解析結果を示す。初期応力状態が異方の場合は、土供試体の限界荷重は初期応力による軸差応力の分だけ低下する。この結果自体は自明と言えるが、地盤の支持力を考える場合に初期応力状態の及ぼす影響の大きさを示唆している。表.4 に $c\phi$ 材の場合の解析結果を示す。表には内部摩擦角と初期応力による限界荷重への影響を示している。表から、1) 初期応力、特に拘束圧、2) 初期軸差応力、3) 内部摩擦角の及ぼす限界荷重への影響が合理的に評価されていることが分かる。実際の地盤の場合には要素試験と異なって、初期応力の拘束圧効果への影響や初期軸差応力がどのように支持力に反映するかは一概に予測することは難しい。初期応力状態の支持力に及ぼす影響は現場実験等でも報告されており、無視することはできない。今後は地盤の初期応力状態を考慮したした支持力解析を行う予定である。

表.3 初期応力による限界荷重の変化 (c 材)

$c = (c_u)_{ps}$=10.0 kN/m^2

初期応力 (kN/m^2)	限界荷重 (kN/m^2)
$\sigma_{x0} = \sigma_{y0} = 0.0$	20.346
$\sigma_{x0} = \sigma_{y0} = 5.0$	20.346
$\sigma_{x0} = 2.5, \sigma_{y0} = 5.0$	17.846

5. 結論

シェイクダウン解析による地盤の支持力は材料定数を決めると弾性係数によらず唯一に定めることができるが、地盤の初期応力状態により支持力は変化することを示した。

表.1 弾性係数による支持力の変化（等方性）

荷重 100.0 kN/m^2, σ_0=14.1 kN/m^2

ν \ E	10.0 (kN/m^2)	1000.0 (kN/m^2)	100000.0 (kN/m^2)
0.10000		52.997	
0.33333	53.170	53.170	53.170
0.45000		53.795	
0.49000		56.224	
0.49900		72.991	
0.49990		276.480	
0.49999		2324.537	

支持力の単位：kN/m^2

表.2 弾性係数による支持力の変化（直交異方性）

荷重 100.0 kN/m^2, σ_0=14.1 kN/m^2

E_1 (kN/m^2)	ν_{12}	E_2 (kN/m^2)	支持力 (kN/m^2)
1000.00	0.33333	3333.33	52.795
1000.00	0.33333	2000.00	52.879
1000.00	0.33333	740.73	53.200
1000.00	0.33333	680.27	52.247
1000.00	0.33333	666.79	53.259
3333.33	0.10000	1000.00	53.574
2000.00	0.16667	1000.00	53.295
740.73	0.45000	1000.00	53.009
680.27	0.49000	1000.00	52.998
666.79	0.49990	1000.00	52.995

ただし、$E_1\nu_{12} = E_2\nu_{21}$

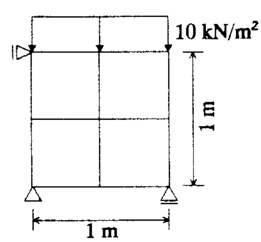

図.2 有限要素メッシュと荷重条件

表.4 初期応力による限界荷重の変化 ($c\phi$材)

c=19.6 kN/m^2

ϕ (度)	初期応力 (kN/m^2)	限界荷重 (kN/m^2)
20.0	$\sigma_{x0} = \sigma_{y0} = 0.0$	57.471
	$\sigma_{x0} = \sigma_{y0} = 5.0$	62.807
	$\sigma_{x0} = 2.5, \sigma_{y0} = 5.0$	57.639
	$\sigma_{x0} = 5.0, \sigma_{y0} = 10.0$	57.807
40.0	$\sigma_{x0} = \sigma_{y0} = 0.0$	88.272
	$\sigma_{x0} = \sigma_{y0} = 5.0$	107.167
	$\sigma_{x0} = 2.5, \sigma_{y0} = 5.0$	95.220
	$\sigma_{x0} = 5.0, \sigma_{y0} = 10.0$	102.167

参考文献

1) G.Maier(1977): Shakedown Analysis, Proc. of the NATO Advanced Study Institute, Engineering Plasticity by Mathematical Programming, Chap. 6, pp.107-134. 2) 北川浩 (1979): 塑性力学の基礎, 日刊工業新聞社.