

高次 Boussinesq 方程式の非線形・分散波動場への適用性

名古屋工業大学 正会員 柏原謙爾

名古屋工業大学 正会員 喜岡 渉

1. はじめに

浅海域における波浪変形のモデル方程式として、Boussinesq 方程式が広く用いられるようになってきた。従来の Boussinesq 方程式は、弱非線形・弱分散波動場を対象とするものであり、深海域あるいは bar 型地形背後の水深増大部、砕波点近傍等の Boussinesq 方程式が仮定している非線形性と分散性のバランスが崩れる領域においては波形の再現性に改善の余地が残されているといえる。これに対し、Nwogu (1993) の提案した任意水深の水平方向流速を代表流速とした Boussinesq 方程式、あるいは複数の水平方向流速成分を連成させることで流速に対する近似精度の向上を図った波動方程式が灘岡ら (1994) ならびに磯部 (1994) によって提案されている。しかしながら、非線形性と分散性それぞれの近似精度、両者間の近似バランスと解の精度についての関連性を具体的に検討した例は見当たらない。本研究では、Nwogu (1993) による Boussinesq 方程式に対して非線形性・分散性それぞれについて近似次数を向上させた波動方程式を誘導し、高次項による波形再現性についての改善効果を検討する。

2. 高次 Boussinesq 方程式に基づく分散関係式

Nwogu (1993) と同様に、任意水深における水平方向流速を用いて Boussinesq タイプの方程式の誘導を行った。非線形性・分散性についてはそれぞれ $\varepsilon = a_0/h_0$ (a_0 : 代表振幅, h_0 : 代表水深), $\mu = \omega^2 h_0/g$ (ω : 角周波数) をパラメーターとしてそれぞれ 2 次, 4 次のオーダーまで考慮を行った。これは両パラメーター間に Boussinesq 方程式と同様 $U_r = \varepsilon/\mu^2 \sim O(1)$ という仮定を設けたことに等しい。分散性について 1 次近似精度を向上させると得られる方程式においては 1 階最高微分階数が上昇し、空間に対して 5 次導関数が含まれることになる。いる。そのため、現段階では効率の良い解析計算は困難であるので、ここでは線形化した方程式に周期性の波を仮定することにより得られた分散関係式 (1) を示すのみとする。

$$C^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = gh \frac{1 - k^2 \left\{ \frac{1}{2} z_\alpha^2 + z_\alpha + \frac{1}{3} \right\} + k^4 \left\{ \frac{1}{24} z_\alpha^4 + \frac{1}{6} z_\alpha^3 + \frac{5}{12} z_\alpha^2 + \frac{1}{2} z_\alpha + \frac{1}{5} \right\}}{1 + k^2 \left\{ \frac{1}{2} z_\alpha^2 + z_\alpha \right\} + k^4 \left\{ \frac{1}{24} z_\alpha^4 + \frac{1}{6} z_\alpha^3 + \frac{1}{2} z_\alpha^2 + \frac{1}{3} z_\alpha + \frac{1}{4} \right\}} \quad (1)$$

ここに、 C : 波速, ω : 角周波数, k : 波数, z_α : 後述する流速定義点の水深である。

3. 非線形弱分散波動場での解析

分散性について 4 次のオーダーまで考慮するのは困難であるため、非線形性についての近似精度向上が波形の再現性におよぼす効果に焦点を絞り検討を行うことにする。高次の Boussinesq 方程式から分散性について 4 次のオーダーの項を消去すると、断面 1 次元においては次の波動方程式を得る。

$$\zeta_t + \left[(h + \zeta) u_\alpha \right]_x + \left[(h + \zeta) \left\{ z_\alpha^2 u_{\alpha xx} + z_\alpha (h u_\alpha)_{xx} \right\} + h \left(\frac{1}{6} \zeta h u_{\alpha xx} + \frac{1}{2} \zeta (h u_\alpha)_{xx} \right) \right]_x = 0 \quad (2)$$

$$u_{\alpha t} + u_\alpha u_{\alpha x} + g \zeta_x + \left[\frac{1}{2} z_\alpha^2 u_{\alpha xxt} + z_\alpha (h u_{\alpha t})_{xx} - \left\{ \zeta (h u_{\alpha t})_x \right\}_x \right] + \left[\frac{1}{2} z_\alpha^2 u_\alpha u_{\alpha xx} + z_\alpha u_\alpha (h u_\alpha)_{xx} + \frac{1}{2} \{ (h u_\alpha)_x \}^2 \right]_x = 0 \quad (3)$$

ここに、 ζ は水面変動, h は静水深, z_α は任意水深 (静水面基準, 上向き正), u_α は任意水深 z_α における水平方向流速である。また、 ∇ は水平方向微分演算子ベクトル, 添字 $_t$ および $_x$ はそれぞれ時間および空間についての微分を表している。数値計算は空間方向にのみ Staggard mesh により離散化する有限差分法を用いて行った。連続式 (1) には空間 3 次導関数が存在するため、境界を除く各点について 4-point 以上で空間微分項の離散化を行った。2 階以下の空間微分項については 3-point の中央差分で同等の打ち切り誤差に対する精度が得られるが、打ち切り誤差項に 3 次導関数が含まれることになるため全ての項に対して 4-point 以

上で離散化を行っている。また、時間積分は Crank-Nicolson 法による離散化を行い、繰り返しによる非線形項の収束計算を行っている。時間についても離散化による打ち切り誤差として3階微分項が出現するが、この影響が無視できる程度に時間積分の増分は微小にして計算を行った。

非線形性による移流効果について検討するために、

図-1に示すようなステップ型地形を用いて数値計算と実験波形との比較を行った。図-2, 3, 4はそれぞれ水深 h_0 を 0.5m とし、波高 5 cm, 周期 2.68 s の波を入射させたときの St.1, St.4 および St.7 における水位変動の時間波形である。ただし、時間軸は入射波周期によって、水位変動は入射波高によって無次元化してある。図中、黒点は実験による波形、点線、実線はそれぞれ Nwogu による Boussinesq 方程式と高次方程式

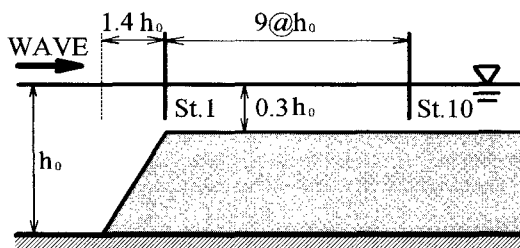


図-1 実験模型諸元

(1), (2) による波形を示している。St.1 においては両方程式の計算結果は良く一致しているが、ステップ上を進行するに従い、Nwogu の方程式が実験波形をよく再現しているのに対し、高次方程式による波形は主峰部分の高さが小さく、分裂の個数については実験波形に対し1峰多いような波形となっている。高次方程式の波形の第3峰目以降の峰に着目すると実験波形に比較的近い位相となっており、高次方程式による波形の主峰と第2波はあたかも実験波形の主峰部が2つに分裂した状態になっている。ここで用いた高次方程式は非線形性についてのみ高次項を考慮しており、本来 Boussinesq 方程式の持つ非線形性と分散性の近似バランスとは異なるものとなっている。すなわち、非線形干渉効果が従来の Boussinesq 方程式以上に再現されるにもかかわらず、干渉効果によって生じた比較的相対水深の大きい高次成分の分散が十分に再現されずこのような分裂を引き起こすものと考えられる。

4. おわりに

本研究では、高次 Boussinesq 方程式を誘導しその近似精度による波形再現性について検討を行った。ただし、計算精度上の問題からここでは非線形性の高次項についてのみ考慮した。高次の分散項まで含めた波動方程式については今後の課題としたい。

参考文献

- 磯部雅彦 (1994), 海岸工学論文集, 第41巻, pp.1-5.
 灘岡和夫・Serdar Beji・大野修史 (1994), 海岸工学論文集, 第41巻, pp.11-15.

Nwogu O. (1994), J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng., Vol. 119, No. 6, pp.618-638.

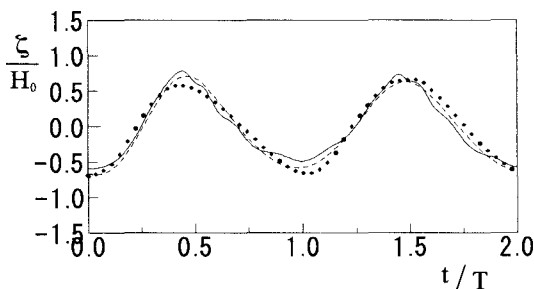


図-2 St.1 における時間波形

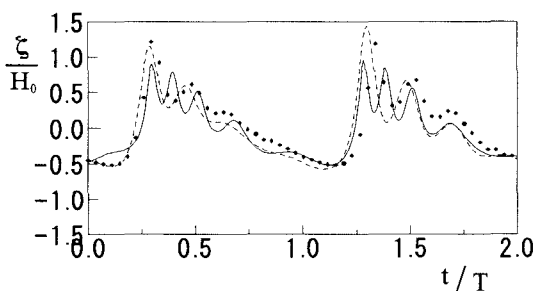


図-3 St.4 における時間波形

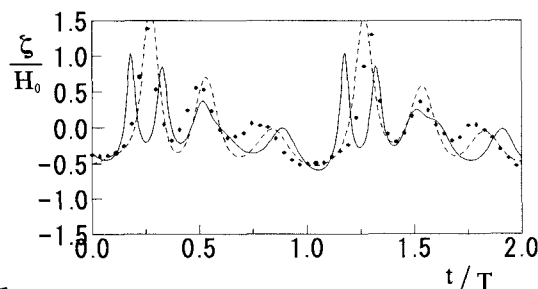


図-4 St.7 における時間波形