重み付き残差法による一様湾曲流路の流れの解析

金沢工業大学大学院　　　○能澤祐明
金沢工業大学工学部　正　員　山坂昌成

1．はじめに　河川の湾曲部では遠心力と圧力の横断勾配の不均衡により、二次流が生じ、この二次流による運動量の横断方向への輸送が主流速の鉛直分布を変化させたり外岸域の主流速を増加させるという、主流と二次流の間で複雑な相互作用を及ぼしあう。二次流の分布は主流速の２乗の鉛直分布に大きく支配され、二次流による運動量輸送が主流速に及ぼす影響は主として、主流速×二次流の鉛直分布に依存する非線形関係にあるので、このような現象を解析的に扱い、主流速分布、二次流速分布について厳密解を求めることは不可能に近い。本研究ではこの点に鑑み、重み付き残差法を用いて解析を行うことにするが、最終目標である主流速の再配分を非線形方程式から求める前段階として、重み関数と流速分布の相似関数形の妥当性を検証するために、解析を線形までの範囲とし、主として二次流の鉛直分布について他の解析結果との比較を試みる。

2．運動方程式と境界条件　本研究では一定渦動粘性係数を仮定し、図１に示したように一定の曲率ν（$=\tilde{B}/2/\tilde{r}_0$）を持つ一様湾曲流路の流下方向の無次元流速uを直線流路での無次元流速u_0からの摂動で$u=u_0+\nu u_1$と表し、同様に横断方向の無次元流速vも$v=\nu v_1$と表し、運動方程式をνの各オーダーごとに整理し、圧力の静水圧分布を仮定すると、

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2}+\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2 u_0}{\partial n^2}=-\frac{R_e\varepsilon}{F_r^2}i_0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2}+\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2 v_1}{\partial n^2}=-\frac{R_e\varepsilon}{\beta}\left(u_0^2-\frac{1}{F_r^2}\frac{\partial \xi_1}{\partial n}\right) \qquad (2)$$

となる。また、境界条件および二次流についての連続式はそれぞれ、

$$z=1\text{で：}\quad \frac{\partial u}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial z}=0$$

$$z=0\text{で：}\quad u=\chi_b\frac{\partial u}{\partial z},\quad v=\chi_b\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$n=\pm 1\text{で：}\quad u=\mp\chi_s\frac{\partial u}{\partial n},\quad v=0$$

$$\int_0^1 v\,dz=0$$

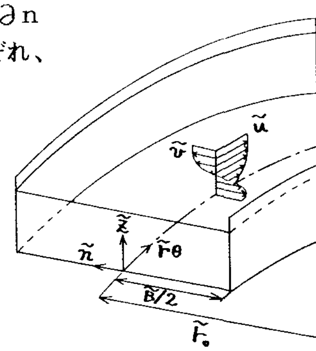

図１．座標系および記号の定義

である。ここに、zは平均水深（$\tilde{h}_0$）で無次元化された鉛直上向き座標、nは半幅（$\tilde{B}/2$）で無次元化された横断座標、βは半幅／平均水深であり、$\nu\xi_1$は平均水深で無次元化された水位上昇量である。またχ_b，χ_sは平均的な摩擦抵抗により決定され、$\chi_b=1/(15\sqrt{C_f})-1/3$，$\chi_s=\chi_b/\beta$にて表される。

3．重み付き残差法を用いた解析

横断方向に流速の相似形を仮定し、試験関数に水面（$z=1$）と底面（$z=0$）の境界条件を満足するように次のものを選んだ。

$$u=f(n)\sum_{j=1}^{2}a_j\cos\{\delta_j(1-z)\} \qquad (3)$$

$$v = g(n)\sum_{j=1}^{3} b_j \cos\{\delta_j(1-z)\} \qquad (4)$$

これらの式の中の係数a_j，b_jはそれぞれ、側壁の影響を受けないと考えられる幅が無限に広い領域での運動方程式［式（1）と式（2）の左辺において第2項の除いたもの］を考え、これより求めた。式中のδ_jは、底面の境界条件より、

$\delta_j \tan\delta_j = 1/\chi_b$

を満たすものである。添え字の記号ｊは条件を満たすδ_jから小さい順に１，２，・・・を取る。また式（3）のｆ（ｎ）、式（4）のｇ（ｎ）は、重み関数に流速の鉛直分布式を選んでガラーキン法を適用して求めている。紙面の関係上、最終結果のそれぞれの係数については省略する。

4．解析結果とまとめ　図2（ａ）から（ｃ）にｕの鉛直流速分布、図3（ａ）から（ｄ）に二次流ｖの鉛直流速分布を示した。水理条件は、代表的な値として［文献1］との比較のために抵抗係数C_f=0.0047，β=9.09，$R_{e\varepsilon}$=226とした。図中の実線は重み付き残差法による解析解を示し、破線は［文献1］の解析解を示している。

重み付き残差法の解析解と［文献1］の解析解と比較において、u_0の鉛直流速分布は流路中央域ではほぼ同じ値を取り、側壁近傍では底面の流速で約2％、水面で約1％の差がある。これは側壁では側壁の影響力が大きくなるため、2項で近似した分だけ差が生じたものと思われる。相対的にこの差は小さいので、u_0の鉛直分布は、2項程度の三角関数で十分表現できるものと思われる。

二次流は、流路中央域では横断的にほとんど変化せず、側壁に近づくに従って、u_0の減少および側壁での境界条件（ｖ=0）の影響を受けて急激に減少する。本解析結果と［文献1］の結果は、側壁近傍で差が顕著になるものの（本解の方が1割程度大）、分布形はほぼ相似であり、ｖについての表現もほぼ適切であると判断できる。今後はこれらの関数形を用いて、主流速の1次、2次近似解を求めて行きたいと考える。

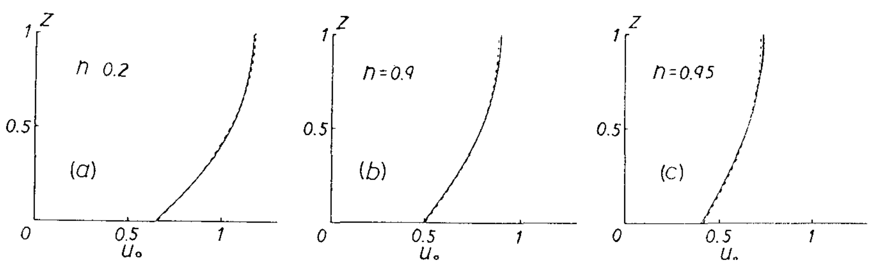

図2．u_0の鉛直流速分布（β=9.09，C_f=0.0047）

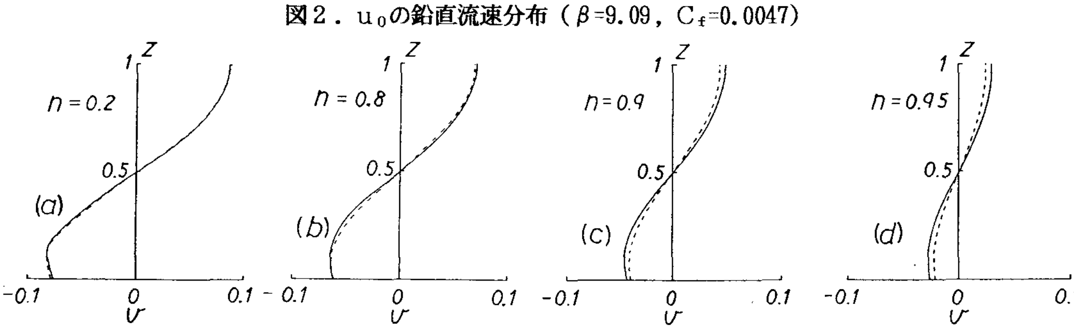

図3．二次流ｖの鉛直流速分布（β=9.09，ν=.111，C_f=0.0047，$R_{e\varepsilon}$=226）

［参考文献］１）山坂・池田・酒寄：一様湾曲流路の流れの三次元解析，土木学会論文集，No.411