ＦＤＳ法による常射流混在流の計算

岐阜大学工学部　正　員　　藤田　一郎
岐阜大学大学院　学生員　○西堀　剛志

１．はじめに

山地河川における流れは、常流、射流の混在した、水理学的にも興味深い複雑な流れとなるため、その現象を数値的にとらえようとする試みが現在でも数多くなされている。しかし、衝撃波あるいは跳水等における不連続面では数値振動が発生しやすく、安定的に計算を進めることが非常に困難である。そこで、本研究では圧縮性流体における衝撃波捕獲法の一つとして知られるＦＤＳ法（流束分離法）[1]を一次元の開水路基礎方程式に適用することにより、跳水を含めた常流・射流の混在する流れにおける水面形の計算を行った。

２．計算手法

基礎方程式は、以下のように表せる。

$$Q_t + E_x = S \tag{1}$$

ただし、

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} h \\ M \end{pmatrix},\ \boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} M \\ uM+gh^2/2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{S}=\begin{pmatrix} 0 \\ gh(S_0-S_f) \end{pmatrix}$$

ここに、$M=uh$であり、u＝流速、h＝水深、S_0＝河床勾配、S_f＝摩擦勾配、g＝重力加速度である。また、差分スキームの基本形は次のようであり、

$$\boldsymbol{Q}_i^{n+1}=\boldsymbol{Q}_i^n-\frac{\Delta t}{\Delta x}(\boldsymbol{E}_{i+1/2}-\boldsymbol{E}_{i-1/2})+\Delta t\,\boldsymbol{S}_i \tag{2}$$

式（２）における数値流束Ｅは以下のように表される。

$$\boldsymbol{E}_{i+1/2}=\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E}_{i+1}+\boldsymbol{E}_i-|\boldsymbol{A}|_{i+1/2}(\boldsymbol{Q}_{i+1}-\boldsymbol{Q}_i)\right] \tag{3}$$

ただし、

$$|\boldsymbol{A}|_{i+1/2}=\boldsymbol{R}_{i+1/2}|\Lambda|_{i+1/2}\boldsymbol{R}^{-1}_{i+1/2} \tag{4}$$

ここで、Ａは流束ヤコビアン行列と呼ばれ、行列の各要素A_{ij}は$\partial E_i/\partial Q_j$として求められる。また、Ａは対角化が可能で、対角行列Λを求めることができ、右固有ベクトルＲとその逆行列R^{-1}も以下のように得ることができる。

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u^2+gh & 2u \end{pmatrix},\ \Lambda=\begin{pmatrix} u-c & 0 \\ 0 & u+c \end{pmatrix},\ \boldsymbol{R}=\frac{h}{2c}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -(u-c) & u+c \end{pmatrix},\ \boldsymbol{R}^{-1}=\frac{1}{h}\begin{pmatrix} -(u+c) & 1 \\ -(u-c) & 1 \end{pmatrix}$$

式（４）の右辺の添え字$i+1/2$で表される量は、次に説明するＭＵＳＣＬ法により、その点における右と左の物理量をそれぞれ決定し、さらにその２量をRoe平均を用いて評価する。

３．ＭＵＳＣＬ法について

物理量ｕのi+1/2の左と右の状態（u_L, u_R）はそれぞれ、

$$(u_L)_{i+1/2}=u_i+\frac{1}{4}[(1-\kappa)\Delta_-+(1+\kappa)\Delta_+]_i \tag{5}$$

$$(u_R)_{i+1/2}=u_{i+1}-\frac{1}{4}[(1-\kappa)\Delta_++(1+\kappa)\Delta_-]_{i+1} \tag{6}$$

から求められる。ただし、$(\Delta_+)=u_{i+1}-u_i$、$(\Delta_-)=u_i-u_{i-1}$であり、$\kappa=1/3$のとき３次精度を与える。また、さらにＴＶＤ的な解を得るためには制限関数としてminmod limiterを導入する。その場合

(Δ_+)、(Δ_-) の代わりに、

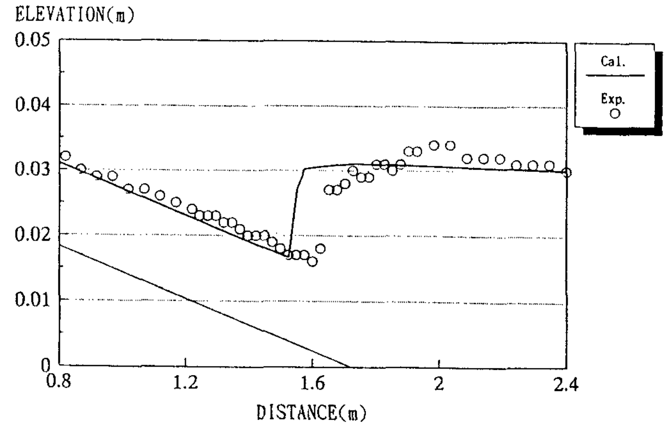
$$(\bar{\Delta}_+) = \mathrm{minimod}\,(\Delta_+,\ b\Delta_-)$$
$$(\bar{\Delta}_-) = \mathrm{minimod}\,(\Delta_-,\ b\Delta_+)$$

を用いる。ここでbはκの関数で、$b=(3-\kappa)/(1-\kappa)$ と定義される。

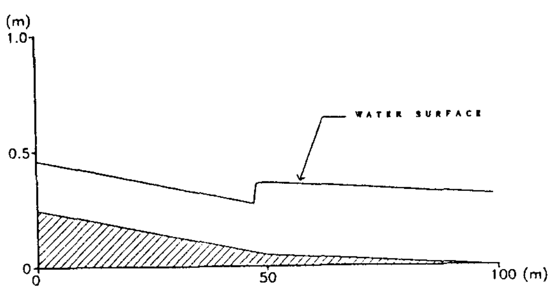
4．結果および考察

図－1は、本手法による解析結果と中谷ら[2]の行った実験結果とを比較したものである。流量は0.415(l/s)、勾配は0.02である。計算値と実験値で、跳水の位置に若干のズレがあるものの、全体的にはおおむね良好に一致しており、解析結果の妥当性がある程度確認できた。しかし、まだ実験データとの比較例は少なく、今後さらにそれらとの比較検討が必要である。

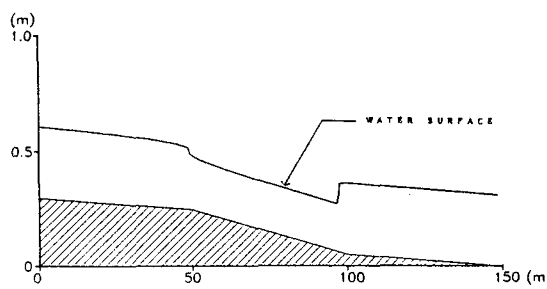
図－2および図－3に他の計算例を示す。図－2は急勾配から緩勾配へと変化する水路、図－3は急勾配をはさんで緩勾配となる水路での計算結果であり、いずれも河床勾配の変化による水面形の特徴がよく現れており、跳水も非常に安定的に再現できることがわかった。



図－1　解析結果と実験データの比較



図－2　跳水の計算例1



図－3　跳水の計算例2

5．おわりに

本研究では、FDS法により定常1次元開水路流れの計算を行った結果、他の方法に比べて非常に安定的に跳水をとらえられることが明らかになった。現在、非定常あるいは河幅・河床の激しく変化する水路での計算を行っており、その有用性に期待がもてる。

【参考文献】

1）藤井：流体力学の数値計算法、東京大学出版会、1994.

2）T.NAKATANI and S.KOMURA：A NUMERICAL SIMULATION OF FLOW WITH HYDRAULIC JUMP USING TVD-MACCORMACK SCHEME,PROCEEDINGS OF XXV IAHR CONGRESS,Vol. I,pp.9-16,1993.