

Spline Prism法を用いた 厚肉円筒パネルの自由振動解析について

大同工業大学 学会員 ○ 加藤年宏
大同工業大学工学部 正会員 水澤富作

1. はじめに 構造物の大型化や重量化に伴いかなり分厚い円筒^ハが曲線コンクリート橋、サイロや落石防護構造などに採用されるので、このような構造要素の構造解析が設計上重要になっている。

本研究では、3次元弾性理論に基づくSpline Prism法を用いて厚肉円筒^ハの振動解析を行い、解析精度や収束性に与えるスプライン次数やプリズム要素の分割数の影響について検討している。また、厚肉円筒^ハの振動特性に与えるシェル厚比、 t/R_c 、偏平角、 ϕ などの影響についても明らかにしている。

2. 解析手法 Fig. 1に示すような曲面Spline Prism要素モデルを導く。このSpline Prism法は、2方向の変位にB-spline関数を仮定し、他の一方向に変位をフーリエ級数展開し、関数の直交性を利用して3次元問題を2次元問題に変換した半数値解析法である。このSpline 関数の次数を高めることにより、任意の高次のSpline Prismモデルが導かれる。式の定式化にあたり、次式で表される無次元円筒座標系を用いる。

$$\xi = (r - R_i)/t, \quad \eta = y/L, \quad \zeta = \theta/\phi \quad \dots (1)$$

ここで、 $t = R_i(\delta - 1)$ 、 $\delta = R_o/R_i$ 、 t は円筒パネルの厚さ、 L はパネル長、 ϕ は偏平角、 r は半径であり、また R_i と R_o はそれぞれ円筒^ハの内径と外径を示す。 R_c は中央曲面の曲率半径であり、 $(R_o + R_i)/2$ で与えられる。曲面プリズム要素で仮定される ξ , η , ζ 方向の変位関数 U, V, W は、式(2)で与えられる。

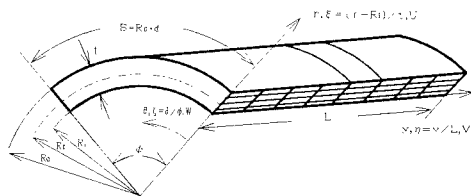


Figure 1. Cylindrical thick panel and co-ordinate systems

$$U = \sum_{\ell=1}^R [N]_{mn} Z_{\ell}(\zeta) \{\delta_A\}_{\ell}, \quad V = \sum_{\ell=1}^R [N]_{mn} Z_{\ell}(\zeta) \{\delta_B\}_{\ell}, \quad W = \sum_{\ell=1}^R [N]_{mn} \bar{Z}_{\ell}(\zeta) \{\delta_C\}_{\ell} \quad \dots (2)$$

ただし、 $\{d\} = \{U, V, W\}^T$, $\{\Delta\}_{\ell} = \{\{\delta_A\}_{\ell}, \{\delta_B\}_{\ell}, \{\delta_C\}_{\ell}\}^T$ であり、 $[S]_{mn}$ は、式(4)で表される。ここで、 $Z_{\ell}(\zeta) = \sin(\ell \pi \zeta)$ 、 $\bar{Z}_{\ell}(\zeta) = \cos(\ell \pi \zeta)$ はそれぞれ軸方向の直線辺で与えられた境界条件を満たした固有関数である。 $[N]_{mn}$ は $N_{m,k}(\xi) \cdot N_{n,k}(\eta)$ で、 $N_{m,k}(\xi)$ と $N_{n,k}(\eta)$ は正規化されたB-spline関数であり、 $k-1$ はB-spline関数のスプライン次数である。したがって、等厚、等方性な円筒パネルのひ

$$\{d\} = \sum_{\ell=1}^R [S]_{mn} \{\Delta\}_{\ell} \quad \dots (3)$$

$$[S]_{mn} = \begin{bmatrix} [N]_{mn} Z_{\ell}(\zeta) & 0 & 0 \\ 0 & [N]_{mn} Z_{\ell}(\zeta) & 0 \\ 0 & 0 & [N]_{mn} \bar{Z}_{\ell}(\zeta) \end{bmatrix} \quad \dots (4)$$

$$\sum_{\ell=1}^R ([K]_{\ell\ell} - \omega^2 [M]_{\ell\ell}) \{\Delta\}_{\ell} = 0 \quad \dots (5)$$

ずみエネルギー、 U_p 、運動エネルギー、 T が求めれば、この円筒^ハの全ポテンシャルエネルギー、 Π は $\Pi = U_p - T$ で与えられるので、ポテンシャルエネルギー最小の原理から、式(5)で与えられる固有方程式が導かれる。また、固有関数の直交性より、各級数項ごとに、式(5)を解けば、固有値計算ができる。ここで、 $[K]_{\ell\ell}$ と $[M]_{\ell\ell}$ は、剛性マトリックス、質量マトリックスであり、その大きさは、 $3 \times (k-1+Mr) \times (k-1+My)$ である。

3. 数値計算および考察 計算結果は振動数^ハパラメータ、 $n^* = \omega t \sqrt{\rho/E}$ を用いて表している。Table 1には、円筒^ハの振動数^ハパラメータの収束性に与える スプライン次数とプリズム要素の分割数、 $Mr=My$ の影響が示してある。これより、プリズム要素の分割数を増大させると、高次の振動数まで 一様な収束状態が得られている。また、スプライン次数を高めると少ない分割数でも安定した収束値が得られている。Table 2に3次元弾性理論に基づくSoldatosらの解法による結果との比較を示してある。これより、本手法で得られた結果とよく一致し

た値となっている。

Table 3には、周辺単純支持された円筒パネルの振動数パラメータに与えるシェル厚比の影響が示されている。比較のために、一次せん断変形理論に基づくSandersのシェル理論³⁾を用いて計算した結果も示してある。これより、シェル厚が増大すると、3次元弾性理論と一次せん断変形理論による結果に差異が見られ、一次せん断変形理論の適用限界が、シェル厚比で0.2以内である。

Table 4には、厚肉円筒パネルの振動数パラメータに与える偏平角とシェル厚比の影響について示してある。偏平角が変化するとシェル厚比も変わるので、 t/L と t/B で定義してある。ただし、 B は中央曲面での円弧辺の長さである。比較のために、一次せん断変形シェル理論による解析結果も示してある。これより、振動数パラメータに与える偏平角の影響が顕著にみられ、また一次せん断変形シェル理論の適用は、シェル厚比に大きく依存している。また、その適用限界は、シェル厚比で0.2以内になっている。

4. あとがき 本文で得られた主な結果を示すと、以下ようになる。 1) 高次のSpline

Prismモデルを用いれば、少ないプリズム要素数でも、高次の振動数まで安定した収束性が示され、また精度の高い解析結果が得られた。 2) シェル厚比が増大するに従い振動数パラメータは増大する。また、一次せん断変形シェル理論を用いて求めた解と比較してシェル厚比が大きくなるほど差が大きくなり、また一次せん断変形理論の適用限界が確認された。 3) 厚肉円筒パネルの振動特性は偏平角に大きく依存している。

最後に、本研究は文部省科学研究費(一般研究(C))、内藤科学技術財団補助金と大同工業大学研究奨励金の援助を受けて行ったもので、ここに関係各位に謝意を表します。数値計算には大同工業大学情報処理センターを利用させて頂きました。

参考文献 1). Soldatos, K. P and Hadjigeorgiou, V. P. Three - dimensional solution of the free vibration problem of homogeneous isotropic cylindrical shells and panels. J. Sound Vibr. 137, 369 -384. 1990 2). 水澤富作、高木信治: Spline Prism法を用いた長方形厚板の振動解析について、構造工学論文集, Vol. 39A, pp. 1-12, 1993. 3). 水澤富作、鬼頭博史: Spline帯板法を用いたクロスプライ積層円筒シェルの振動解析について、構造工学における数値解析法シナポジウム論文集, Vol. 18, pp. 337-342, 1994.

Table 1. Convergence study of frequency parameter, $n\pi\omega t\sqrt{\rho/E}$ of simply supported cylindrical shell panels; $\phi=45^\circ$, $L/R=1.0$ and $\nu=0.3$

t/Rc ($\lambda=R_o/R_i$)	$k-1$	$M_r=M_y$	1	2	Mode 3	4	5	6
0.1 (1.1053)	2	4	0.079001	0.17530	0.19589	0.24817	0.27350	0.32129
		8	0.078837	0.16545	0.19582	0.24817	0.26763	0.28525
		10	0.078832	0.16524	0.19582	0.24817	0.26751	0.28327
		12	0.078830	0.16517	0.19582	0.24816	0.26747	0.28268
	3	4	0.078831	0.16574	0.19582	0.24817	0.26782	0.29533
		8	0.078828	0.16512	0.19582	0.24816	0.26743	0.28236
		10	0.078827	0.16512	0.19582	0.24815	0.26743	0.28225
		12	0.078827	0.16512	0.19582	0.24815	0.26743	0.28225
	2	4	0.78343	0.99213	1.2880	1.4071	1.6597	1.8848
		8	0.78294	0.99212	1.2876	1.3907	1.6582	1.8666
		10	0.78292	0.99212	1.2876	1.3903	1.6581	1.8662
		12	0.78291	0.99211	1.2876	1.3902	1.6581	1.8660
0.4 (1.5000)	3	4	0.78292	0.99212	1.2876	1.3913	1.6581	1.8675
		8	0.78291	0.99212	1.2876	1.3900	1.6581	1.8659

Table 2. Comparison of the natural frequencies, $n\pi\omega t\sqrt{\rho/(1+\nu)/E}$ of simply supported circular cylindrical panel; $\nu=0.3$

ϕ (°)	L/Rc	t/Rc	R_o/R_i	t/L	1st	2nd	3rd	4th
30	0.517638	0.1	1.105263	0.193185	1.20328 #1.20325	3.14682 3.14682	5.25541 5.25539	5.76108 5.76102
					0.579556	3.14991	4.62052	5.00861
60	1.0	0.3	1.352941	0.1	2.21292 #2.21282	3.14991	4.62052	5.00858
					0.80964 #0.80963	3.15331	5.23679	5.78461
		0.1	1.105263	0.3	1.52805 #1.52805	3.16159 3.16159	5.11234 5.11234	5.56169 5.56168
					1.352941	3.15331	5.23675	5.78457

* the results are calculated by Soldatos and Hadjigeorgiou(1990) using the analytical method.

Table 3. The effect of t/Rc on the first six frequency parameters, $n\pi\omega t\sqrt{\rho/E}$ of simply supported cylindrical panels; $\phi=45^\circ$, $L/R=1.0$ and $\nu=0.3$

t/Rc ($\lambda=R_o/R_i$)	Theory	1	2	Mode 3	4	5
0.05 (1.0513)	3D-elasticity	0.025805	0.053135	0.053635	0.075980	0.086038
	FSDT Sanders*	0.025814	0.053193	0.053230	0.075857	0.086062
0.1 (1.1053)	3D-elasticity	0.078827	0.16512	0.19582	0.24815	0.26743
	FSDT Sanders*	0.078696	0.16493	0.19462	0.19469	0.26561
0.2 (1.2222)	3D-elasticity	0.26125	0.49675	0.51400	0.62920	0.64913
	FSDT Sanders*	0.25852	0.38854	0.51142	0.61838	0.64502
0.4 (1.5000)	3D-elasticity	0.78291	0.99212	1.2876	1.3900	1.6581
	FSDT Sanders*	0.75754	0.7049	1.3031	1.3533	1.5400

* FSDT sanders is the first-order shear deformable Sanders' shell theory³⁾

Table 4. The effect of shallowness angle, ϕ on the frequency parameters, $n\pi\omega t\sqrt{\rho/E}$ of simply supported cylindrical panels; $L/R=1.0$, $t/Rc=0.2$, $\lambda=1.2222$ and $\nu=0.3$

ϕ	t/L	t/B	1	2	Mode 3	4	5
30°	0.2	0.382	3D-elasticity	0.4247	0.6443	0.7447	0.8472
			FSDT Sanders*	0.3885	0.4184	0.6944	0.7770
45°	0.2	0.255	3D-elasticity	0.2613	0.4969	0.5140	0.6292
			FSDT Sanders*	0.2585	0.3885	0.5114	0.6184
60°	0.2	0.190	3D-elasticity	0.2101	0.3726	0.4247	0.4741
			FSDT Sanders*	0.2089	0.3885	0.4184	0.4713
90°	0.2	0.127	3D-elasticity	0.1931	0.2485	0.2613	0.4247
			FSDT Sanders*	0.1932	0.2585	0.3885	0.4184

* FSDT sanders is the first-order shear deformable Sanders' shell theory³⁾