粘弾性面外波動問題の境界要素法による時間ステップ解析

福井大学工学部　正会員　福井卓雄
福井大学大学院　学生員　船戸慶輔
福井大学工学部　学生員　○　中江　崇

1　はじめに

粘弾性体における SH 波の伝播問題を時間領域境界要素法により解析する。一般に, 線形粘弾性体の波動問題を境界要素法により解析する場合には, 基本特異解の容易に得られる周波数領域境界要素法 (あるいは Laplace 変換を施した像空間における境界要素法) を用いて周波数領域 (Laplace 像空間) の数値解を求め, それらを集めたものを数値逆変換して時間領域の解を得る, という手法が取られてきた。しかしながら, 対象とする領域が非線形性を有する部分を持ち, 境界要素法と有限要素法の結合解法などを用いたい場合には, どうしても, 時間領域境界要素法を構成する必要がある。

時間領域境界要素法を構成するためにはまず時間領域問題における基本特異解が必要であるが, 粘弾性体の波動問題においては, もっとも簡単な SH 波の問題においてすら, ごく一部の構成関係モデル (Maxwell モデル) を除いてはその基本特異解を解析的に得ることは困難である。そこで, 筆者らが波動問題において開発した, 周波数領域の境界要素法の数値システムから直接的に数値積分変換を行い, 時間領域境界要素法の数値システムを得る方法 [1] を線形粘弾性体の波動問題に適用することを試みる。

2　粘弾性面外波動問題

粘弾性面外波動問題の基礎式を挙げる [2, 3]。媒質は等方等質の線形粘弾性体であるとする。面外波動を考えるので, 3 次元空間の直交座標系を (x_1, x_2, x_3) とするとき, 変位は x_3-方向成分のみを考え, すべての物理量は (x_1, x_2) だけの関数であるとする。2 次元領域 B における線形粘弾性面外波動問題の初期値境界値問題は変位 u_3 について

$$E * du_{3,ii} = \rho \ddot{u}_3 \qquad \text{in } B,\ 0 < t < \infty \tag{1}$$

$$u_3(\boldsymbol{x}, 0) = u_0(\boldsymbol{x}), \quad \dot{u}_3(\boldsymbol{x}, 0) = v_0(\boldsymbol{x}) \qquad \text{in } B,\ t = 0 \tag{2}$$

$$u_3(\boldsymbol{x}, t) = \hat{u}_3(\boldsymbol{x}, t) \quad \text{on } \partial B_1,\ 0 < t < \infty, \qquad n_i \tau_{i3}(\boldsymbol{x}, t) = \hat{s}_3(\boldsymbol{x}, t) \quad \text{on } \partial B_2,\ 0 < t < \infty \tag{3}$$

となる。ここに, ρ は媒質の質量密度, E はせん断に対する緩和関数である。微分に関する省略表現 $\dot{u} = \partial u/\partial t$ および $u_{3,i} = \partial u_3/\partial x_i$ を用いている。$\tau = E * du_{3,i}$ はせん断応力であり, $E * du_3$ はくりこみ積 [2] を表す。緩和関数 $E(t)$ は不遡及の公理 $E(t) = 0,\ -\infty < t < 0$ を満足するものとする。また, $\partial B = \partial B_1 + \partial B_2$ は領域 B の境界であり, n_i は境界上の単位法線ベクトルである。u_0, v_0, $\hat{u}$, $\hat{s}$ は与えられた関数である。

周波数 ω で調和振動する波の場合, すなわち, $u_3(\boldsymbol{x}, t) = u_3(\boldsymbol{x}) e^{-i\omega t}$ となる場合には, 初期値境界値問題 (1), (2), (3) は境界値問題

$$E^*(\omega) u_{3,ii} + b_3 = -\rho \omega^2 u_3 \qquad \text{in } B \tag{4}$$

$$u_3(\boldsymbol{x}) = \hat{u}_3(\boldsymbol{x}) \quad \text{on } \partial B_1, \qquad n_i \tau_{i3}(\boldsymbol{x}) = \hat{s}_3(\boldsymbol{x}) \quad \text{on } \partial B_2 \tag{5}$$

に変換される。ここに, $E^*(\omega)$ は複素弾性係数であり, 緩和関数 E の Fourier 変換により

$$E^*(\omega) = -i\omega \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{i\omega t}\, dt \tag{6}$$

で与えられる。この場合の応力は $\tau = E^* u_{3,i}$ となる。微分方程式 (4) は，複素数の波数 $k = \omega/(E^*/\rho)$ を用いて書き直すと，

$$u_{3,ii} + k u_3 = 0 \tag{7}$$

となる。これは Helmholtz 型の方程式であり，形式的には，Helmholtz 方程式とまったく同じ取扱いができる。

3　周波数領域における境界要素法

初期値境界値問題 (1), (2), (3) については，一般的な線形粘弾性モデルに対して方程式 (1) の基本特異解が解析的には得られないので，直接に時間領域の境界要素法を構成することは難しい。しかし，周波数領域の境界値問題 (7), (5) については，Helmholtz 型方程式を扱うので，その基本特異解はよく知られている。ここでは，周波数領域における境界要素法について簡単に述べる。

境界値問題 (7), (5) に対する境界積分方程式は一般化した Green 公式

$$C(\boldsymbol{x}) u_3(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial B} [G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}) n_i \tau_{i3}(\boldsymbol{y}) - S(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}) u_3(\boldsymbol{y})] \, ds_y \tag{8}$$

から導かれる [4]。ここに，$C(\boldsymbol{x})$ は点 $\boldsymbol{x}$ が領域の内部にあるとき 1，領域の外にあるとき 0，なめらかな境界上にあるとき 1/2 の値を取る。G は基本特異解で

$$G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}) = (i/4) \mathrm{H}_0^{(1)}(k|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|) \tag{9}$$

である。ここに，$\mathrm{H}_0^{(1)}$ は Hankel 関数である。また，$S(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}) = \partial G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})/\partial n_y$ である。

境界上における式 (8) に適当な近似を導入して，離散化すれば，境界要素法が構成できる [4]。

4　時間領域解法のための積分変換

時間領域解法のための境界要素法を導くためには，上で得られた周波数領域の境界要素法を数値的に Fourier 逆変換しなければならない。この操作には周波数に関する無限積分が含まれる。しかし，周波数 ω が無限大に近づくときの基本特異解 (9) の特性から，無限積分の収束性はきわめて悪く，通常の FFT を用いたり，二重指数関数型の数値積分公式を用いることができない。筆者らはすでに波動方程式について同様の数値逆変換を行う方法を開発しており [1]，同じ方法が線形粘弾性の場合にも使えるかどうかについて検討しよう。

例として三要素の標準線形モデルについて考えよう。複素波数 k を実数波数 k_0 と複素屈折率 $\tilde{n}$ とに分けて $k = k_0 \tilde{n}$ とおく。粘弾性体の緩和弾性係数を μ，一定ひずみ条件下の応力の緩和時間を τ_e，一定応力条件下のひずみの緩和時間を τ_s とすると，k_0 と $\tilde{n}$ は

$$k_0 = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\sqrt{\frac{1+\omega^2\tau_s^2}{1+\omega^2\tau_e\tau_s}}}, \qquad \tilde{n} = \frac{e^{\frac{\theta}{2}}}{\sqrt{\cos\theta}}, \quad \tan\theta = \frac{\omega(\tau_e + \tau_s)}{1 + \omega^2 \tau_e \tau_s} \tag{10}$$

となる。k_0 の右辺の分母は周波数が ω であるときの位相速度であり，$\theta/2$ は 複素屈折率 $\tilde{n}$ の偏角である。

周波数 ω を無限大に近付けるとき，位相速度は初期位相速度 $\sqrt{\tau_s/\tau_e}\sqrt{\mu/\rho}$ に近づき，複素屈折率の偏角は 0 に近づく。すなわち，周波数が十分に大きいときには，Hankel 関数 (9) の引数 $k|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$ は複素平面上で実軸に近づく。結局，このとき，基本特異解は速度が初期位相速度である波動方程式の基本特異解と同様の挙動をすることになる。したがって，文献 [1] で開発した方法がそのまま適用可能であると考えられる。

詳細な解析結果については当日報告する。

参考文献

[1] 福井卓雄，船戸慶輔: 波動問題における周波数領域境界要素法から時間領域境界要素法への数値変換について．境界要素法論文集，第 11 巻，pp. 65-70, 1994.

[2] Fung, Y.C.: *Foundation of Solid Mechanics*, Chapter 15, Prentice-Hall, 1965.

[3] Achenbach, J.D.: *Wave Propagation in Elastic Solids*. Chapter 10, North-Holland, 1975.

[4] 境界要素法研究会編: 境界要素法の理論と応用，5. 動弾性問題，コロナ社，1986.