

三次元半無限体内クラックによる散乱エネルギー

東海大学海洋学部 学 生 ○松下 浩之
東海大学海洋学部 学 生 吉田 崇
東海大学海洋学部 正 員 北原 道弘

1. はじめに

材料内に分布して存在するクラックの分布密度を超音波を利用して非破壊的に推定する手法の一つとして、散乱による超音波の減衰を利用する方法が考えられる。散乱減衰がクラックの分布密度及びクラックの存在により生じた散乱波が有する散乱エネルギーと関係しているためである。クラック間の多重散乱の影響を無視したとき、散乱減衰は、近似的にはあるが、クラックの分布密度と一個のクラックにより散乱された散乱波が有するエネルギーの積として表すことができる。このとき、一個のクラックによる散乱エネルギー量を把握しておく必要がある。

ここでは、三次元半無限弾性体内に存在する単一クラックによる散乱エネルギー量を計算するための近似計算式について要約し、散乱エネルギーの分布状態を表す散乱微分断面積の一解析例を示す。

2. 散乱断面積

散乱断面積 P は散乱波の時間平均パワーと入射波の時間平均インテンシティ $\langle I \rangle$ の比として定義され、散乱断面積の方位依存性を表す散乱微分断面積 $dP/d\Omega$ は次式により計算できる。

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\Omega} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\omega x^2}{2 \langle I \rangle} \text{Im}(\hat{x}_i \sigma_{ij}^{sc} u_j^{sc*}) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \text{Im}(\hat{x}_i \sigma_{ij}^{sc} u_j^{sc*})}{k_L(\lambda + 2\mu)} \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

ここで、 $d\Omega$ は立体角である。また、 u_j^{sc} は散乱波、 σ_{ij}^{sc} は散乱波による応力、 $*$ は複素共役、 $\hat{x}_i$ は応力 σ_{ij}^{sc} が作用する面上の単位ベクトル、 x は散乱波を観測する遠方の点 $\mathbf{x}$ の座標原点からの距離 ($x = |\mathbf{x}|$)、 ω は角振動数である。上式 (1) から、散乱断面積は散乱波が有するエネルギーを入射波の進行方向に投影した散乱体の断面積に換算して表示したものであることがわかる。また、式 (1) では、入射波を $\mathbf{p}$ 方向 ($|\mathbf{p}| = 1$) に進む単位振幅の平面縦波 $u_i^I = p_i \exp(ik_L \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})$ として、入射波のインテンシティ

$$\langle I \rangle = -(1/2)\omega k_L(\lambda + 2\mu) \dots\dots\dots (2)$$

を代入している。ここで、 k_L は縦波の波数、 λ と μ はラメ定数である。式 (1) より、散乱微分断面積は遠方における散乱波 $u_j^{sc}(\mathbf{x})$ を求めれば決まる。散乱微分断面積 $dP/d\Omega$ が決まれば、散乱断面積 P は散乱微分断面積の立体角 $d\Omega$ に関する積分によって求めることができる。

3. 遠方散乱場

式 (1) より、散乱微分断面積を求めるためには、半無限体内に存在するクラックによる遠方における散乱場 u_j^{sc} を計算する必要がある。この遠方散乱場は次のように書ける (Fig.1 参照)。

$$u_i^{sc}(\mathbf{x}) = \int_{S_c} \hat{\epsilon}_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) n_k \Delta u_j(\mathbf{y}) dS_y \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 Δu_j はクラックの開口変位、 n_k はクラック面上の単位法線ベクトル、 $\hat{\epsilon}_{ijk}$ は半無限表面 S_H 上の境界条件を満足する応力グリーン関数の遠方近似である。上式 (3)

に応力グリーン関数の遠方近似の具体的表現を代入して整理すると次の表現を得る。

$$\begin{aligned} u_i^{sc}(\mathbf{x}) &= \sum_{\alpha=L,T,H} A_i^\alpha \frac{\exp(ik_\alpha x)}{x} \\ &+ \sum_{\alpha=L,T,H} \sum_{\beta=L,T,H} A_i^{\alpha\beta} \frac{\exp(ik_\beta x)}{x} \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

ここに、 L は縦波、 T はソース点 $\mathbf{y}$ と観測点 $\mathbf{x}$ を含む面内に偏向した横波、 H はこの面外に偏向した横波を表している。また、 A_i^α はソース点 $\mathbf{y}$ から観測点 $\mathbf{x}$ に直接伝播する直接 α 波の散乱振幅、 $A_i^{\alpha\beta}$ はソース点 $\mathbf{y}$ から α 波として発生した波動が半無限表面上の点 E で反射し β 波として遠方の観測点 $\mathbf{x}$ に到達する反射 $\alpha\beta$ 波の散乱振幅である (Fig.2 参照)。散乱振幅 A_i^α と $A_i^{\alpha\beta}$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} A_i^\alpha &= ik_\alpha f_i^\alpha I_n^\alpha(\mathbf{y}) \\ A_i^{\alpha\beta} &= ik_\beta R_\beta^\alpha(\theta_\alpha) f_i^\beta d_n^\alpha I_n^\alpha(\mathbf{y}') \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

また、 $I_n^\alpha(\cdot)$ は次のようである。

$$\begin{aligned} I_n^\alpha(\mathbf{z}) &= -\frac{C_{kjm} M_l^\alpha(\mathbf{z})}{4\pi\rho c_\alpha^2} \\ &\times \int_{S_c} n_k(\mathbf{y}) \Delta u_j(\mathbf{y}) e^{-ik_\alpha \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{z}} dS_y \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

上式において $M_l^\alpha(\mathbf{z}) = \partial \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{z} / \partial y_l$ である。即ち

$$M_l^\alpha(\mathbf{y}) = \hat{x}_l, M_l^\alpha(\mathbf{y}') = \hat{x}_l(1 - 2\delta_{2l}) \dots\dots\dots (7)$$

となる。遠方応力場 $\sigma_{ij}^{sc}(\mathbf{x})$ は、一般表現

$$\sigma_{ij}^{sc}(\mathbf{x}) = C_{ijkl} \partial u_k^{sc}(\mathbf{x}) / \partial x_l \dots\dots\dots (8)$$

に式 (4) を代入すればよい。結果を整理すると次のようになる。

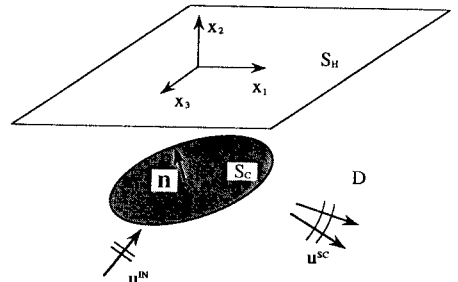


Fig.1 Crack S_c in elastic half-space D with surface S_H

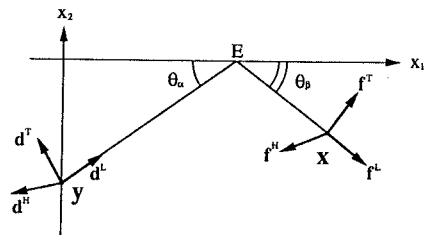


Fig.2 Reflected wave path (source: $\mathbf{y}$, observation: $\mathbf{x}$)

$$\sigma_{ij}^{sc}(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha} B_{ij}^{\alpha} \frac{\exp(ik_{\alpha}x)}{x} + \sum_{\alpha} \sum_{\beta} B_{ij}^{\alpha\beta} \frac{\exp(ik_{\beta}x)}{x} \dots\dots\dots (9)$$

ここで、 B_{ij}^{α} と $B_{ij}^{\alpha\beta}$ は次のようである。

$$B_{ij}^{\alpha}(\mathbf{x}) = ik_{\alpha} \{ \lambda \delta_{ij} \hat{x}_k A_k^{\alpha} + \mu (\hat{x}_i A_j^{\alpha} + \hat{x}_j A_i^{\alpha}) \}$$

$$B_{ij}^{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = ik_{\beta} \{ \lambda \delta_{ij} \hat{x}_k A_k^{\alpha\beta} + \mu (\hat{x}_i A_j^{\alpha\beta} + \hat{x}_j A_i^{\alpha\beta}) \} \quad (10)$$

4. 散乱微分断面の具体的表現

遠方散乱場 u_i^{sc} と遠方散乱応力場 σ_{ij}^{sc} は式 (4) と (9) に与えられる。散乱微分断面を表す式 (1) にこの遠方散乱場と遠方応力場を代入して整理すると、次の結果を得る。

$$\frac{dP}{d\Omega} = |\mathbf{A}^L|^2 + \frac{k_L}{k_T} (|\mathbf{A}^T|^2 + |\mathbf{A}^H|^2) + |\mathbf{B}^L|^2 + \frac{k_L}{k_T} (|\mathbf{B}^T|^2 + |\mathbf{B}^H|^2) + 2\text{Re}\{\mathbf{A}^L \cdot \mathbf{B}^{L*}\} + 2\frac{k_L}{k_T} \text{Re}\{\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}^{T*}\} + 2\frac{k_L}{k_T} \text{Re}\{\mathbf{A}^H \cdot \mathbf{B}^{H*}\} \dots\dots\dots (11)$$

ここで、 $\mathbf{A}^{\alpha}$ と $\mathbf{B}^{\alpha}$ は次のようである。

$$\mathbf{A}^{\alpha} = \{A_j^{\alpha}\}, \quad \mathbf{B}^{\alpha} = \sum_{\beta} \{A_j^{\beta\alpha}\} \dots\dots\dots (12)$$

式 (11) の表現において、右辺の第1と第2項は直接波、第3項と第4項は反射波、残りの項は直接波と反射波の干渉の影響を表している。

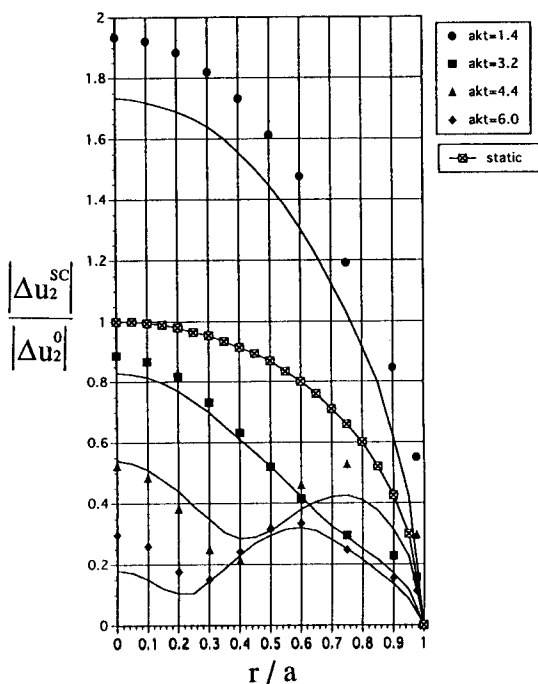


Fig.3 COD for circular crack in full space (BEM vs. Mal⁽¹⁾)

5. 数値計算例

まず、クラック開口変位の計算過程の精度確認のため、無限体内に存在する円形クラックの開口変位を Mal⁽¹⁾ と比較した結果を Fig.3 に示す。横軸は円形クラックの半径 a で無次元化したクラック中心からの距離である。入射波は円形クラック面に垂直な軸 (x_2 軸) 方向に入射する平面縦波である。使用した要素は二次要素 (接点数 = 181, 要素数 = 60) である。図中、Mal の結果は実線で、ここでの数値計算結果は黒塗りの記号で表している。

半無限空間の表面付近に存在するクラックとして、Fig.4 に示すように表面から $a/2$ の位置に半無限表面に平行に存在する円形クラックを考える。入射波は真下から x_2 軸に沿って入射する無限化波数 $ak_L = 0.3$ の縦波である。Fig.5 に散乱微分断面の角度分布を図示した。ここでは直接波成分 $(dP/d\Omega)^D$ を白丸、反射波成分 $(dP/d\Omega)^R$ を白三角、相互干渉成分 $(dP/d\Omega)^{DR}$ を白四角 (負の値)、およびこれらの総和 $(dP/d\Omega)^T$ を黒丸で示している。鉛直下方の直接波と反射波は位相に 180° の差があるため、合成された散乱エネルギー (各成分の総和を表す黒丸) は鉛直下方では零になっていることがわかる。

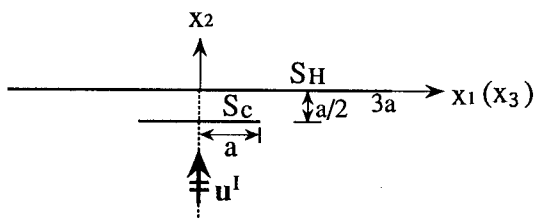


Fig.4 Circular crack in half-space

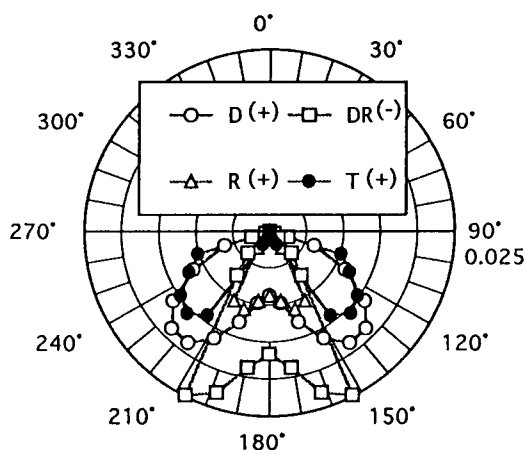


Fig.5 Differential cross-sections for circular crack in half-space ($ak_L = 0.3$)

参考文献

- (1) Mal, A.K.: Interaction of elastic waves with a penny-shaped crack, Int. J. Engng Sci., 8, pp.381-388, 1970.