水文頻度解析における三母数確率分布モデルの下限値推定手法について

岐阜大学工学部　学生員　○山田　貴史
岐阜大学工学部　正会員　　宝　　馨
コーネル大学　　　　　J. R. Stedinger

1　はじめに

水文頻度解析においてしばしば用いられる3母数の確率分布は、2母数の分布よりもデータに適合しやすい分、逆に確率水文量の推定誤差が大きいことが知られている。一般に水文諸量には下限値が存在し、3母数確率分布の3つの母数のうちの1つはその下限値を定める母数である。その下限値母数を何らかの方法で予め定め、他の2母数に既存の母数推定法を用いる場合、その推定精度が向上する例も報告されている。

本研究では三母数対数正規分布について下限値推定法として提案されている岩井法について検討する。

2　三母数対数正規分布における岩井法の推定精度について

三母数対数正規分布の確率密度関数は

$$f(x) = \frac{k}{(x+b)\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(k \ln \frac{x+b}{x_0+b}\right)^2\right] \quad (1)$$

ここで $y = \ln(x+b)$ とすると

$$\begin{aligned} \mu_y &= \ln(x_0+b) \\ \sigma_y &= \frac{1}{k} \\ a &= -b \end{aligned}$$

岩井法は日本の確率計算法の標準法として広く用いられており、順序統計学の理論を用いて母数 b (すなわち a) を推定したのち、積率法を用いて他の母数 x_0, k (または、μ_y, σ_y) を推定する方法である[1]。

岩井法では、標本値 x_i と x_{N-i+1} の数対につき1つ1つ b に相当する b_s を求め、これらの b_s の平均値をもって b としている。特に水文諸量に用いる場合、両端部の 10 % の部分の適合度をよくするため $m = N/10$ 対の観測値の組をとり b_sの平均値をもって b としている。

岩井法のアルゴリズムは以下の通りである。

観測期間を N年とし、N個の資料が与えられたとき、その順序統計量 $x_1, x_2, \cdots, x_N$の幾何平均を x_gとする。

$$x_g = (x_1 x_2 \cdots x_N)^{\frac{1}{N}} \quad (2)$$

$$\log x_g = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \log x_i \quad (3)$$

$$b_s = \frac{x_i x_{N-i+1} - {x_g}^2}{2x_g - (x_i + x_{N-i+1})} \quad (4)$$

$$\hat{b} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} b_s \quad (5)$$

$$\ln(\hat{x}_0 + \hat{b}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \ln(x_i + \hat{b}) \quad (6)$$

$$\frac{1}{\hat{k}^2} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(\ln\frac{x_i+\hat{b}}{\hat{x}_0+\hat{b}}\right)^2 \quad (7)$$

岩井法の下限値推定の際に用いる両端部の m 対の観測値の組は従来 10 % をとることとされているが、$m=1$ で十分であるという説もある[2]。

本研究の目的は、日本で多用されている岩井法において採用されるべき m を明らかにすることである。すなわち確率水文量推定精度が、m とデータ数 Nとの関係によりどのように変化するのか、モンテカルロ・シミュレーションにより評価する。その際シミュレーション回数における結果の比較も行う。

3　確率水文量の推定精度

3.1　方法

以下の手順により推定精度の優劣を評価する。

(1) 母集団を想定する。すなわち母集団の確率分布と母数を仮定する。まず母分布を三母数確率分布と仮定し、大阪の年最大日雨量の 92 年間のデータから母数を算定する。

(2) 母集団から大きさ Nの標本を抽出する。すなわち、三母数確率分布に従う乱数を N個発生させる。

(3) 発生させた標本に対して、岩井法（下限値推定法＋積率法）により母数を推定し、確率水文量を推定する。

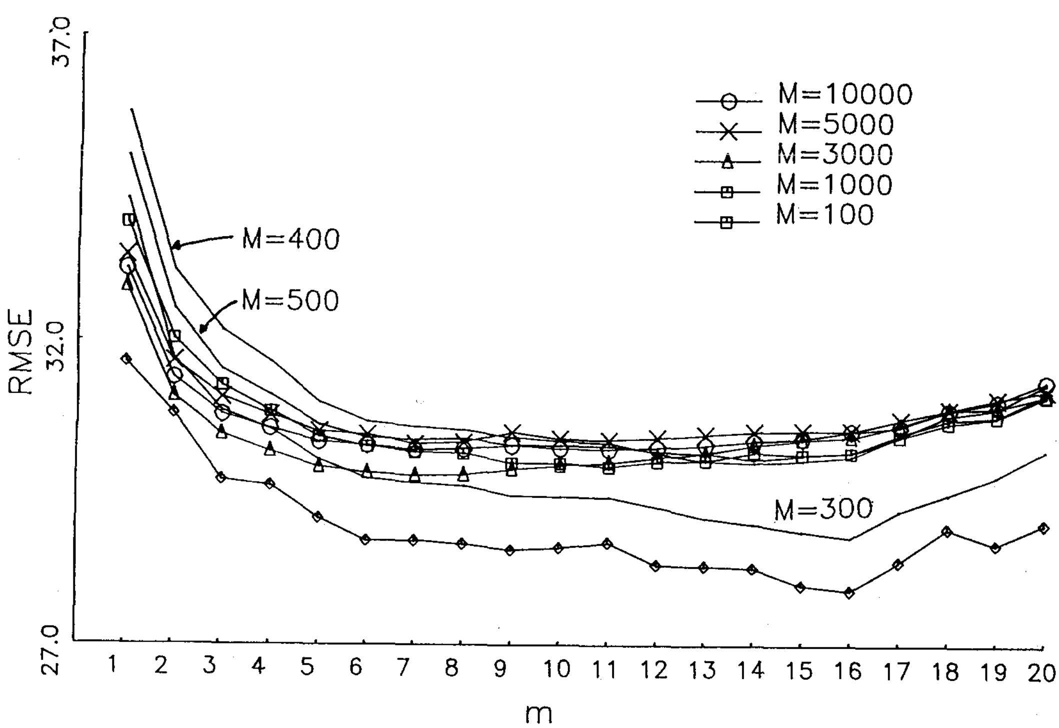

図 1: m と RMSE との関係

(4) (2) と (3) を M 回繰り返し、母数と確率水文量の推定値の平均値と標準偏差（推定誤差）を算定する。

(5) 平方根平均二乗誤差（RMSE）を用いて母数あるいは確率水文量の推定精度の比較を行う。

まず標本の大きさを $N = 100$ として、m の値によって確率水文量の推定精度がどのように変化するのかを以上の方法で調べた。また、繰り返し回数 M が最低どれくらい必要かについても検討した。

3.2 結果と考察

1. 図 1 は岩井法における 100 年確率水文量の推定精度を RMSE を評価基準として表したものと m との関係である。シミュレーション回数 $M = 100, 300, 400, 500, 1000, 3000, 5000, 10000$ の場合について示した。$M = 5000$ で $M = 10000$ に近い結果を得た。よって $M = 5000$ 程度の繰り返し回数でよさそうである。

2. ここでの検討条件（$N = 100$, リターンピリオド $T = 100$ 年、母歪係数 1.5）では $m = 7$ のときが最小の RMSE を与えた。$m = N/10 = 10$（岩井法）と $m = 1$（Stedinger の方法）との比較でも前者のほうが良いという結果を得た。この検討条件に近い条件（$N = 80$, リターンピリオド $T = 100$ 年, 母歪係数 1.625）での星らの結果によれば、後者（Stedinger の方法）の方が前者（岩井法）より RMSE についてはよいとされている。この理由についてはまだ詳しく検討していないが, 生成された標本の棄却の方法が異なることによるものと考えている。

講演時には、さらに系統的な数値実験の結果を示す。

参考文献

1) 岩井重久・石黒政儀：応用水文統計学, 森北出版, 1970, pp. 73-83.

2) Hoshi, K., J.R. Stedinger and S.J. Burges: Estimation of log-normal quantiles — Monte Carlo results and first-order approximations, J. Hydrology, Vol. 71, 1984, pp. 1-30.