

一次せん断変形シェル理論を用いた積層円筒 シェルの振動解析について

大同工業大学工学部 正会員 ○水澤富作

大同工業大学大学院 学会員 鬼頭博史

大同工業大学工学部 竹内哲也

1. はじめに 高い比剛性や比強度を有する一方向繊維強化複合材料 (FRP) は、軽量化、耐衝性、耐熱性や耐腐食性などに優れ、以前から航空宇宙や自動車産業などで広く用いられている。積層複合円筒パネルは、強い異方性、面内剛性に比較してかなり小さな横せん断剛性を示すので、薄シェルでも横せん断変形の影響が重要になる。これまでも、完全な積層円筒シェルに関しては多くに研究がなされているが、開断面の積層円筒パネルの研究が非常に少ないように思われる¹⁻³⁾。

本研究では、一次せん断変形理論とSanders及びDonnellのシェル理論に基づくスプライン帯板法を用いて、対称及び逆対称クロス・プライ円筒パネルの振動解析を行い、この種の積層円筒パネルの振動特性に与える積層数、弾性係数比や偏平角などの影響について検討を行っている。

2. 解析手法 Fig. 1に示す積層複合円筒パネルの振動解析を行うために、一次せん断変形理論とSanders及びDonnellのシェル理論に基づくスプライン帯板法により式の定式化を行っている。クロス・プライ積層円筒パネルでは、各積層 (層) が直交異方性材料から成り、それぞれ完全に接着しているものと仮定する。材料主軸 (1, 2) 方向の弾性係数を E_1, E_2 、ポアソン比

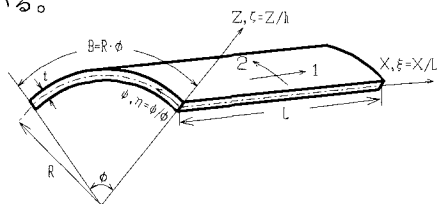


Fig. 1 Composite laminated cylindrical panel and co-ordinate systems

を ν_{12} 及びせん断弾性係数を G_{12}, G_{13}, G_{23} で表す。次式で定義される面内剛性 A_{ij} 、曲げ剛性 D_{ij} 、横せん断剛性 A_{ij} 及び曲げ一面内連成剛性 B_{ij} を考慮する。 $D_{ij} = (1/3) \sum Q_{ij} (h_n^3 - h_{n-1}^3)$; $i, j = 1, 2, 6$, $A_{ij} = \kappa_{ij} \sum Q_{ij} (h_n - h_{n-1})$; $i, j = 4, 5$, $B_{ij} = (1/2) \sum Q_{ij} (h_n^2 - h_{n-1}^2)$; $i, j = 1, 2, 6$... (1)

ここで、 κ_{ij} はせん断修正係数、 Q_{ij} は (n) 層での弾性係数、 h_n はシェル中央面からの各積層面までの距離である。ただし、対称クロス・プライ積層円筒パネルでは、 $B_{ij} = 0$ になる。式の定式化では、Fig. 1に示すような無次元の円筒座標系; $\xi = X/L$, $\eta = \phi/\phi$, $\zeta = Z/t$ を用いる。ここで、 L は円筒パネル長、 t はシェル厚、 ϕ は偏平角である。したがって、一次せん断変形理論では、それぞれ独立した次式のような変位関数が仮定される。 $U(\xi, \eta, \zeta) = t [U(\xi, \eta) + \zeta \chi_x(\xi, \eta)]$, $V(\xi, \eta, \zeta) = t [V(\xi, \eta) + \zeta \chi_\psi(\xi, \eta)]$,

$W(\xi, \eta, 0) = t W(\xi, \eta)$... (2); ここで、 U と V は面内変位、 χ_x と χ_ψ は回転角、 W はたわみを示す。したがって、スプライン曲面帯板要素で仮定される5つの変位関数は、それぞれ次式のように表される。

$U = \sum \sum A_{mn} N_{n,k}(\eta) Y_m(\xi)$, $V = \sum \sum B_{mn} N_{n,k}(\eta) Y_m(\xi)$, $\chi_x = \sum \sum C_{mn} N_{n,k}(\eta) Y_m(\xi)$, $\chi_\psi = \sum \sum D_{mn} N_{n,k}(\eta) Y_m(\xi)$, $W = \sum \sum E_{mn} N_{n,k}(\eta) Y_m(\xi)$... (3)
ここで、 $k-1$ はスプライン関数の次数、 $Y_m(\xi)$ は固有関数、 $N_{n,k}$ は正規化されたB-スプライン関数である。

Sandersのシェル理論でのひずみ-変位の関係式は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= (t/L) \partial U / \partial \xi, \quad \epsilon_{\phi\phi} = (t/R\phi) \partial V / \partial \eta + (t/R) W, \quad \gamma_{x\phi} = (t/R\phi) (\partial U / \partial \eta) + (t/L) \partial V / \partial \xi, \\ \gamma_{xz} &= \chi_x + (t/L) \partial W / \partial \xi, \quad \gamma_{\phi z} = \chi_\psi + (t/R\phi) \partial W / \partial \eta - (t/R) V, \quad K_{1x} = (t/L) \partial \chi_x / \partial \xi, \\ K_{1\phi} &= (t/R\phi) \partial \chi_\psi / \partial \eta, \quad K_{1x\phi} = (t/L) \partial \chi_\psi / \partial \xi + (t/R\phi) \partial \chi_x / \partial \eta + (t/2R) \{ (t/L) \partial V / \partial \xi \\ &\quad - (t/R\phi) \partial U / \partial \eta \} \end{aligned} \quad \dots (4)$$

クロス・プライ積層円筒パネルのひずみエネルギー、 U と運動エネルギー、 T は、次式で表される。

$$U_p = (LBt/2) \int_0^1 \int_0^1 \int_{-0.5}^{0.5} \{ \epsilon^T \{ \sigma \} d\xi d\eta d\zeta, \quad T = (\omega^2 LBt/2) \int_0^1 \int_0^1 \int_{-0.5}^{0.5} \rho \{ U^2 + V^2 + W^2 \} d\xi d\eta d\zeta \quad \dots (5)$$

したがって、全ポテンシャルエネルギーを最小化すれば、基礎方程式が導かれる。なお、相対する2辺が単純支持された場合には、固有関数の直交性により、各級数項ごとに固有値解析が行える。

3. 数値計算例及び考察 ここでは、円周方向に平行な2辺が単純支持された対称及び逆対称クロス・プライ積層円筒パネルの振動特性に与える積層数、弾性係数比、シェル厚比や境界条件などの影響について解析する。数値計算で用いた複合材料は、グアライト/エポキシの一方強化材であり、次のような材料特性を仮定している。 $E_1/E_2=5-40$, $G_{12}/E_2=G_{13}/E_2=0.5$, $G_{23}=0.2$, $\nu_{12}=0.25$ 。なお、せん断修正係数には $\kappa_{44}=\kappa_{55}=5/6$ を用いた。解の収束性に与える帯板分割数やスプライン次数の影響を調べるために、周辺単純支持された2層からなる逆対称クロス・プライ積層円筒パネル($E_1/E_2=25$, $t/L=0.1$, $B/L=0.1$)の振動解析を行った。その結果、高次のスプライン帯板モデルを用いれば、少ない要素数でも安定した収束状態が得られている。

Table 1 では、単純支持された2層と3層の円筒積層パネル($E_1/E_2=25$, $t/L=0.1$, $B/L=1.0$)の振動数パラメータの精度比較が示されている。他の手法による結果^{3, 4)}と比較して、良く一致した結果が得られている。また、Donnellのシェル理論による解がSandersのシェル理論による値と比較して常に大きな値を示している。

Fig. 2では、種々の境界条件を持つ対称及び逆対称クロス・プライ積層円筒パネル($L/R=1.0$, $t/R=0.1$, $\phi=60^\circ$)の振動数パラメータ, $n_1^*=\omega\sqrt{\rho t^2/E_2}$ に与える積層数と積層構造の影響が示されている。これより、積層数を高めれば、その影響が急激に小さくなる。また、振動数は境界条件にも

Table 1. Comparison of accuracy of frequency parameters, $n_1^*=\omega\sqrt{\rho t^2/E_2}$, of simply supported cross-ply cylindrical panels: $E_1/E_2=25$, $G_{12}/E_2=G_{13}/E_2=0.5$, $G_{23}/E_2=0.2$, $\nu_{12}=0.25$, $t/L=0.1$, $B/L=1.0$

R/L		(Antisymmetric): N=2 (0/90)		(Symmetric): N=3 (0/90/0)	
		Sanders	Donnell	Sanders	Donnell
5.0	FSDT ⁴⁾	8.9087	8.9488	12.2082	12.2157
	HSDT ⁴⁾	8.9082		12.207	
	FSDT ³⁾	9.0230		11.850	
	HSDT ³⁾		8.931		12.212
10.0	FSDT ⁴⁾	8.8883	8.9036	12.1742	12.1761
	HSDT ⁴⁾	8.8879		12.173	
	FSDT ³⁾	8.9790		11.800	
	HSDT ³⁾		8.897		12.175
20.0	FSDT ⁴⁾	8.8901	8.8955	12.1657	12.1662
	HSDT ⁴⁾	8.8900		12.166	
	FSDT ³⁾	8.972		11.79	
	HSDT ³⁾		8.894		12.166
100.0	FSDT ⁴⁾	8.8974	8.8985	12.1630	12.1630
	HSDT ⁴⁾	8.8974		12.163	
	FSDT ³⁾	8.975		11.79	
	HSDT ³⁾		8.898		12.163
			8.941		11.958

依存し、特に固定辺を持つ場合には、逆対称積層構造が曲げと面内の連成効果により高い剛性を示すが、固定辺を含まない場合には、対称積層構造が高い剛性を示している。しかしながら、自由の境界条件を持つ場合には、積層数の増大とともに、剛性が減少している。したがって、自由の境界条件を持つ対称クロス・プライ積層円筒パネルでは、単純に積層数を増しても振動数が増大しないので、設計上注意が必要であると思われる。

4. あとがき 一次せん断変形理論とSandersのシェル理論に基づくスプライン帯板法を用いて、対称及び逆対称クロス・プライ積層円筒パネルの振動解析を行い、次のような結果が得られた。

- 1). 高次のスプライン帯板要素を用いれば、少ない要素数で安定した収束値と精度が得られる。
- 2). クロス・プライ積層円筒パネルの振動数に与える積層数, N , 積層構造, 弾性係数比, E_1/E_2 やシェル厚比, t/R の影響は大きく見られるが、その大きさは境界条件にも依存していることが明らかになった。なお、本研究は平成5年度文部省科研費(一般研究(C))及び本学研究奨励金を受けている。

参考文献 1) Soldatos, K.P.: A comparison of some shell theories used for the dynamic analysis of cross-ply laminated circular cylindrical panels. JSV, 97, 305-319, 1984. 2) Carrera, E.: The effects of shear deformation and curvature on buckling and vibrations of cross-ply laminated composite shells. JSV, 150, 405-433, 1991. 3) Librescu, A.A. et al.: A shear deformable theory of laminated composite shallow shell... Acta Mech., 76, 1-33, 1989. 4) Reddy, J.N. et al.: Int. J. Eng. Sci. 23, pp. 319-330, 1985.

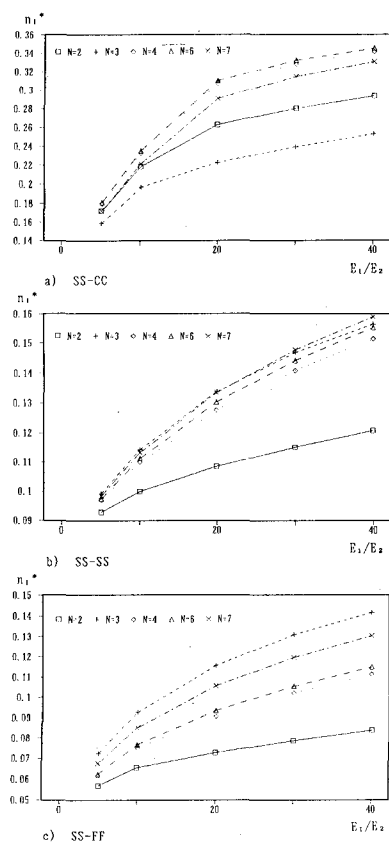


Fig. 2 The effects of the number of lamina, N on the frequency parameter, n_1^* of cross-ply laminated cylindrical panels: $L/R=1.0$, $t/R=0.1$ and $\phi=60^\circ$