外部荷重による半無限空間の応答に関する研究
－円柱座標系に於ける時間領域ＢＥＭの適用－

豊橋技術科学大学工学部　　○張　海洲
豊橋技術科学大学　　雷　哲翔
豊橋技術科学大学　正会員　栗林　栄一

１．はじめに

地球のような弾性半無限空間の応答問題を研究するには、境界要素法がよく使われる。弾性体での振動解析は、従来周波数領域で行うが最近時間領域での研究は注目を浴びている。本論文は円柱座標系に於ける時間領域でのＢＥＭ解析法に着目し、その最新研究成果を取り入れ、地盤の応答特性を研究すると同時に解析法の実用性を検討する。

２．解析理論[1]

解析には、半無限弾性体での波動基本解を用いた円柱座標系における時間領域境界要素法を用いる。

弾性体の物体力を省略すれば、静止している弾性体について領域を囲む境界上の変位と面力を関係づける積分方程式は以下のように表される。

$$C_{ij}\{U_i(P,t)\}=\int_\Gamma\int_\tau U_{ij}(P,t;Q,\tau)\{s_i(Q,\tau)\}d\tau d\Gamma(Q)-\int_\Gamma\int_\tau S_{ij}(P,t;Q,\tau)\{u_i(Q,\tau)\}d\tau d\Gamma(Q) \tag{1}$$

この式はLove's identity[2]と呼ばれる。U_{ij},S_{ij}は基本解、u,sはそれぞれ変位と面力、C_{ij}はテンソル係数である。時間領域積分方程式(1)は有限領域固体空間及び無限領域固体空間に適用できる。

座標変換によって円柱座標系での時間領域ＢＥＭ方程式は次のように書ける。

$$\tilde{C}_{\alpha\beta}\{U_\beta(P,t)\}=\int_\Gamma\int_\tau \hat{A}^T(P)\tilde{U}_{ij}(P,t;Q,\tau)\hat{A}(Q)\{s_\beta(Q,\tau)\}d\tau d\Gamma(Q)-\int_\Gamma\int_\tau \hat{A}^T(P)\tilde{S}_{ij}(P,t;Q,\tau)\hat{A}(Q)\{u_\beta(Q,\tau)\}d\tau d\Gamma(Q) \tag{2}$$

ここで

$\tilde{C}_{\alpha\beta}=\hat{A}(P)\tilde{C}_{ij}\hat{A}(P)$　；α，β＝ r，θ，z；Âは直角座標系から円柱座標系に変換するマトリクスである。

$$\hat{A}=\begin{bmatrix}\cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0\\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

また、式(2)の変位ベクトルと面力ベクトルをフーリエ級数より分解すると次式となる。

$$\tilde{C}_{\alpha\beta}\sum_{h=0}^{\infty}\begin{Bmatrix}u^{sP}_{rh}\cos(h\phi)+u^{aP}_{rh}\sin(h\phi)\\ u^{sP}_{\theta h}\sin(h\phi)+u^{aP}_{\theta h}\cos(h\phi)\\ u^{sP}_{zh}\cos(h\phi)+u^{aP}_{zh}\sin(h\phi)\end{Bmatrix}=\sum_{h=0}^{\infty}\int_\Gamma\int_\tau \hat{A}^T(P)\tilde{U}_{ij}\hat{A}(Q)\begin{Bmatrix}s^{sQ}_{rh}\cos(h\phi)+s^{aQ}_{rh}\sin(h\phi)\\ s^{sQ}_{\theta h}\sin(h\phi)+s^{aQ}_{\theta h}\cos(h\phi)\\ s^{sQ}_{zh}\cos(h\phi)+s^{aQ}_{zh}\sin(h\phi)\end{Bmatrix}$$
$$-\sum_{h=0}^{\infty}\int_\Gamma\int_\tau \hat{A}^T(P)\tilde{S}_{ij}\hat{A}(Q)\begin{Bmatrix}u^{sQ}_{rh}\cos(h\phi)+u^{sQ}_{rh}\sin(h\phi)\\ u^{sQ}_{\theta h}\sin(h\phi)+u^{sQ}_{\theta h}\cos(h\phi)\\ u^{sQ}_{zh}\cos(h\phi)+u^{sQ}_{zh}\sin(h\phi)\end{Bmatrix} \tag{3}$$

式中の s,aはｘ軸に対する対称、逆対称;h はフーリエモードである。h=0,1,2...∞

時間と空間両方とも離散化したｋ点の変位に関する積分方程式は式(4)である。

$$\tilde{C}_{\alpha\beta}\tilde{X}_h\begin{Bmatrix}u^s_{rh}\\ u^s_{\theta h}\\ u^s_{zh}\end{Bmatrix}^N_k=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_{Lm}\int_{\Delta t}\tilde{U}^s_{\alpha\beta}\tilde{N}d\tau\tilde{\phi}r\begin{Bmatrix}\{s^s_h\}^{n-1}_{1,m}\\ \{s^s_h\}^{n-1}_{2,}\\ \{s^s_h\}^n_{1,m}\\ \{s^s_h\}^n_{2,m,}\end{Bmatrix}dLd\theta-\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_{Lm}\int_{\Delta t}\tilde{S}^s_{\alpha\beta}\tilde{N}d\tau\tilde{\phi}r\begin{Bmatrix}\{u^s_h\}^{n-1}_{1,m}\\ \{u^s_h\}^{n-1}_{2,m}\\ \{u^s_h\}^n_{1,m}\\ \{u^s_h\}^n_{2,m}\end{Bmatrix}dLd\theta \tag{4}$$

ここでL_mは要素の長さ；$\tilde{N}$、$\tilde{\Phi}$　はそれぞれ時間と空間の内挿関数のマトリクス；$\tilde{X}_h$ はフーリエ対称係数マトリクスである。

境界上全ての点をに関する方程式は式(5)となる。

$$[C]\{u_k^s\}^N = \sum_{N=1}^{N} [G_o^s]^{N,n}\{s_k^s\}^{n-1} + \sum_{N=1}^{N} [G_1^s]^{N,n}\{s_k^s\}^{n} - \sum_{N=1}^{N} [H_o^s]^{N,n}\{u_k^s\}^{n-1} - \sum_{N=1}^{N} [H_1^s]^{N,n}\{u_k^s\}^{n} \quad (5)$$

３．応答解析

半無限弾性体（図１）において定常分布の単純力による各時刻の応答を解析する。パラメータは以下となる。

C_p = 86.60 m/sec , C_s = 50.0 m/sec , ρ = 2000.0 kg/m^3 ,

Δt=0.5～0.9 $\Delta L/C_p$, Δt、ΔLはそれぞれ標本点間隔と線形要素の長さである。

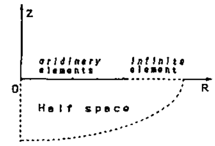

図 1

荷重は以下の３つ時間関数にしたがう定常分布の単純力である。

(1)Heaviside 関数

(2)ステップ関数 ： 外力が突然作用し、一定の大きさを保持したまま１０Δｔ続く。

(3)シフト関数 ：0から線形的に増加し，１６Δｔの時逆方向に変わって線形的に減少し，３０Δｔの時再び0となる。荷重は幾つかの要素の線形分布（図の２）と仮定する。

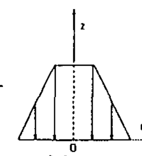

図 2

４．解析結果

(1) 半無限体に於ける変位は波の伝播による生じたものである。

(2) 外部荷重を急に加えると、擾乱が発生し波の形で半無限空間に渡って伝播する。波が遠く行くことにつれ変位が段々減衰する。しかし、Heaviside 力の場合時間の増加に従って動的変位は静的変位に近づく。

(3) 外力の時間的変化が Heaviside関数或いはステップ関数に従えば半無限体表面に於いて１０Δｔの時、外力作用点或いはその近くに最大変位を生じる。

(4) 解析モデルには３つの時間関数と円錐台形の荷重を採用したが、構成式では時間及び空間に対して要素で分割しているため、任意的な時間関数と荷重が模擬できる。

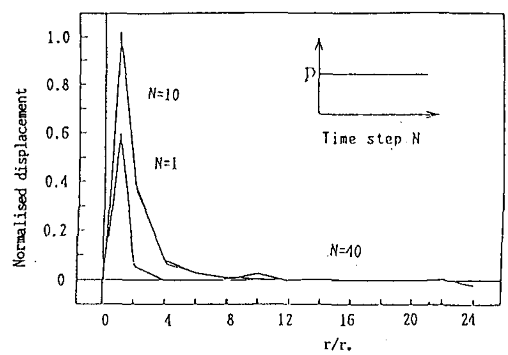

図 3 Heaviside力による地面の変位

５．結論

(1) 基本解は弾性体に於ける波動の時間領域理論解であるので、この解を用いた時間領域境界要素法は弾性体に実際に存在している波について解析でき、半無限空間の表面においては境界条件だけで波の透射条件を自然に満足する。つまり伝播距離の増加に伴って波が徐徐に減衰していく性質が反映できる。したがって解析の信頼性は高いと考えられる。

(2) 時間領域ＢＥＭ理論は、フーリエ級数を取り入れ、円柱座標系に於ける諸問題を各々のフーリエモードに分解する。これらの独立モードの解を合成したものが問題の解になる為任意的な境界条件に対応できる。

(3) 軸対称体の性質及びフーリエ理論を利用することにより弾性領域の経線上だけに要素を分割すれば解を求められる。つまり時間－空間の４次元問題を１次元問題に変えた。

参考文献

(1). Lei zhexiang TIME DOMAIN BOUNDARY ELEMENT METHOD & ITS APPLICATIONS
A thesis presented for the Degree of Doctor of philosophy. (1993)

(2). Love.A.E.H (1904) The propagation of wave motion in an isotropic elastic medium.
Proc.London Math,Soc.2(1),P231-344