

低周波近似による散乱エネルギー量の算定

東海大学大学院 学生員 ○加藤 昇治
東海大学海洋学部 高松 宏充
東海大学海洋学部 正員 北原 道弘

1. はじめに

超音波を利用して構造材料の不均質性を評価しようとする場合、散乱エネルギーが散乱減衰と関係していることから、不均質部により散乱された散乱波が有する散乱エネルギー量を算定することが、不均質性評価を定量化するための一つのポイントとなる。三次元弾性論的にこの散乱エネルギーを正確に算定しようとした場合、任意形状の散乱体に対しては数値解析に頼らざるを得ない。散乱エネルギーを算定するための適切な近似法があれば便利である。ここでは、散乱エネルギー量の算定において主に低周波数域で有効と思われるボルン近似の適用性について検討し、その適用域を明らかにすることを試みる。

2. 散乱場の領域型積分表現

Fig.1 に示すように、領域 D 内のある部分に散乱体 $\bar{D}$ が存在する場合を考える。この領域 $\bar{D}$ 内の弾性テンソルを $\bar{C}_{ijkl}$ 、密度を $\bar{\rho}$ とし、 $\bar{D}$ の境界を S とする。いま、弾性テンソルと密度の変動を次のように定義する。

$$\delta C_{ijkl} = \bar{C}_{ijkl} - C_{ijkl} \quad (1a)$$

$$\delta \rho = \bar{\rho} - \rho \quad (1b)$$

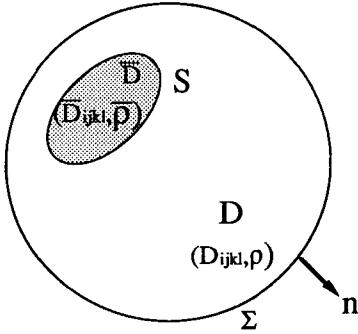


Fig.1 Scatterer $\bar{D}$ with $\bar{C}_{ijkl}$ and $\bar{\rho}$

以下、領域 D 内の物理量 (C_{ijkl}, ρ) と $\bar{D}$ 内の物理量 ($\bar{C}_{ijkl}, \bar{\rho}$) は各々の領域内で定数 (均質) とする。このとき、領域 D と $\bar{D}$ を合わせた領域 $D + \bar{D}$ 内の弾性テンソルと密度は次のように書ける。

$$C''_{ijkl}(\mathbf{x}) = C_{ijkl} + \delta C_{ijkl} \theta(\mathbf{x}) \quad (2a)$$

$$\rho''(\mathbf{x}) = \rho + \delta \rho \theta(\mathbf{x}) \quad (2b)$$

ここに、 $\theta(\mathbf{x})$ は次のように定義されている。

$$\theta(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{x} \in \bar{D} \\ 0 & \mathbf{x} \in D \end{cases} \quad (3)$$

弾性テンソルと密度に関する式 (2) の表現を用いると、領域 $D + \bar{D}$ における変位場 u_i に対する運動方程式は次のように書ける。

$$[C''_{ijkl}(\mathbf{x})u_{k,l}]_{,j} + \rho''\omega^2 u_i = 0 \quad (4)$$

上式 (4) に C''_{ijkl} と ρ'' に関する式 (2) の表現を代入して、次式を得る。

$$C_{ijkl}u_{k,l,j} + \rho\omega^2 u_i = -(\delta\rho\omega^2 u_i \theta + \delta C_{ijkl}u_{k,l,j} \theta + \delta C_{ijkl}u_{k,l} \theta_{,j}) \quad (5)$$

いま、上式の右辺は領域 $\bar{D}$ 内に分布する物体力 f_i と見なすことができる。即ち、次のように置ける。

$$f_i = \delta\rho\omega^2 u_i \theta + \delta C_{ijkl}u_{k,l,j} \theta + \delta C_{ijkl}u_{k,l} \theta_{,j} \quad (6)$$

この物体力 (6) を変位場の積分表現に代入して整理すると、変位場 $u_i(\mathbf{x})$ は体積型の積分表現として最終的に次のように書ける。

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{x}) &= u_i^I(\mathbf{x}) + \int_{\bar{D}} U_{im}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f_m(\mathbf{y}) dv(\mathbf{y}) \\ &= u_i^I(\mathbf{x}) + \delta\rho\omega^2 \int_{\bar{D}} U_{im}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_m(\mathbf{y}) dv(\mathbf{y}) \\ &\quad + \delta C_{jklm} \int_{\bar{D}} U_{ij,k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \varepsilon_{lm}(\mathbf{y}) dv(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (7)$$

ここに、 ε_{lm} は弾性ひずみであり、 U_{im} は次のような基本解である。

$$\begin{aligned} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{1}{4\pi\mu} \left[\frac{e^{ik_T r}}{r} \delta_{ij} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{k_T^2} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{e^{ik_T r}}{r} - \frac{e^{ik_L r}}{r} \right\} \right] \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、 k_T と k_L は領域 D 内における横波と縦波の波数である。

3. ボルン近似による遠方散乱場の領域型積分表現

式 (7) の積分表現に遠方近似 $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \sim x - \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}$ を導入し、さらに、変位場 u_m とひずみ場 ε_{lm} を入射波 u_m^I と入射波によるひずみ ε_{lm}^I に置き換えると、ボルン近似を導入した遠方散乱場 u_i^S の積分表現を得る。

$$u_i^S(\mathbf{x}) = \hat{x}_i \hat{x}_j f_j^B(k_L) \frac{e^{ik_L x}}{x} + (\delta_{ij} - \hat{x}_i \hat{x}_j) f_j^B(k_T) \frac{e^{ik_T x}}{x} \quad (9)$$

ここに、ベクトル f_j^B は次のような入射波の場の領域 $\bar{D}$ 内における積分である。

$$\begin{aligned} f_j^B(k_\alpha) &= \frac{k_\alpha^2}{4\pi\rho\omega^2} \left\{ \delta\rho\omega^2 \int_{\bar{D}} u_j^I(\mathbf{y}) e^{-ik_\alpha \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}} dv(\mathbf{y}) \right. \\ &\quad \left. + ik_\alpha \hat{x}_k \delta C_{jklm} \int_{\bar{D}} \varepsilon_{lm}^I(\mathbf{y}) e^{-ik_\alpha \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}} dv(\mathbf{y}) \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

4. ボルン近似による散乱全断面積の計算

散乱波が有するエネルギー量の表示法の一つに散乱全断面積がある。

これは、散乱波のエネルギーを入射波の進行方向における散乱体の投影面積に換算したものである。

まず、散乱微分断面積 $dP/d\Omega$ は次のように書ける。

$$\frac{dP(\omega)}{d\Omega} = \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{\omega}{2} \frac{\text{Im}[x^2 \hat{x}_i \sigma_{ij}^S(\mathbf{x}) u_j^S(\mathbf{x})]}{\langle I^I \rangle} \quad (11)$$

ここに、 u_j^S はボルン近似による遠方散乱場 (9) の複素共役であり、 σ_{ij}^S は式 (9) から計算された応力である。散乱全断面積 $P(\omega)$ は、微分断面積 (11) を全立体角について積分することにより次のように求まる。

$$P(\omega) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{dP}{d\Omega} \sin \theta d\theta d\phi \quad (12)$$

ここで、 θ は正の x_3 軸から計った散乱角である。

5. 計算結果

Fig.2 は一例としてアルミ母材中に存在する球形チタンによる散乱全断面積を示したものであり、横軸が球の半径 a で無次元化した入射波の波数 ak_L 、縦軸が散乱全断面積を球の断面積で無次元化した $P/\pi a^2$ である。黒丸が式 (9) ~ (12) を用いて計算したボルン近似を導入した全断面積、白丸が正解である。波数が小さい (周波数が低い) 場合には、ボルン近似による散乱全断面積は良い近似値を与えていることがわかる。より詳細にボルン近似の適用域について検討するために、母材と球形インクルージョンのヤング率比 E/E と密度比 $\bar{\rho}/\rho$ を変えてパラメータスタディーを行った結果を示したのが Fig.3 と Fig.4 である。ボルン近似は低周波数域あるいは散乱効果が小さいとき、比較的良好な近似値を与える近似法であることがわかる。

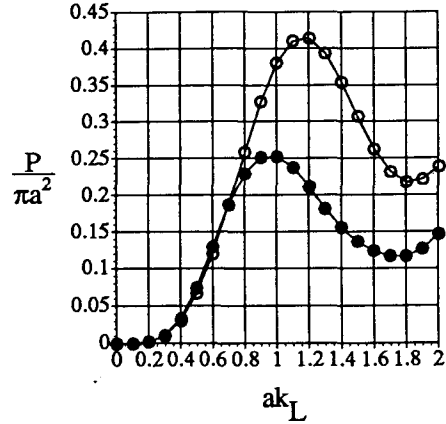


Fig.2 Total scattering cross - section for a Titanium inclusion in an Aluminium matrix (Born approx. ● vs. exact sol. ○, $E/E = 1.60$, $\nu/\nu = 1.0$, $\bar{\rho}/\rho = 1.0$)

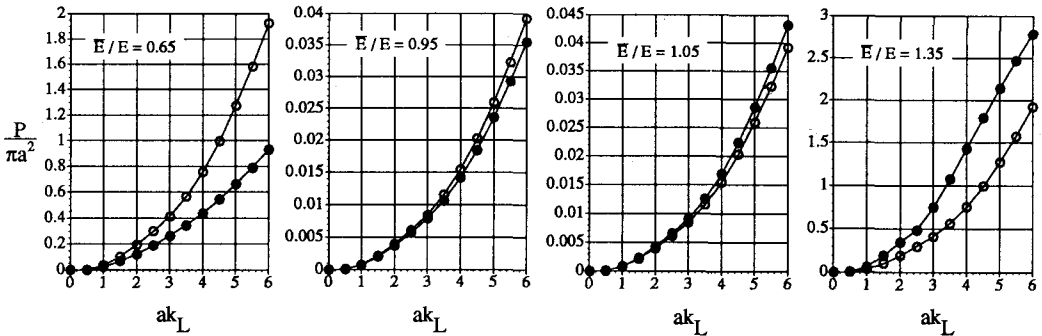


Fig.3 Total scattering cross - section for different Young's modulus (Born approx. ● vs. exact sol. ○, $\nu/\nu = 0.25$, $\bar{\rho}/\rho = 1.0$)

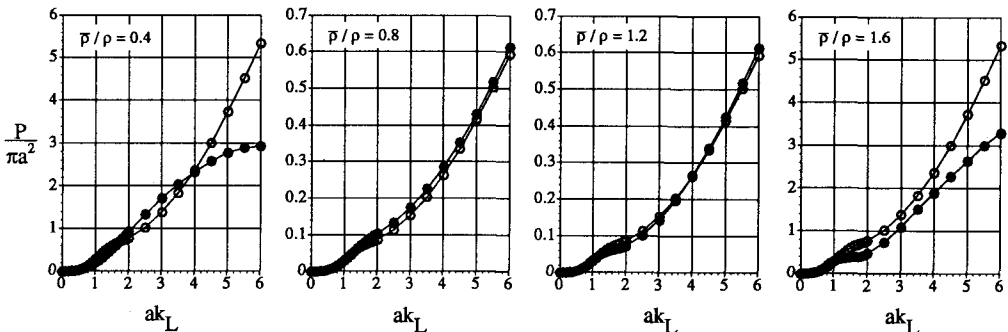


Fig.4 Total scattering cross - section for different density (Born approx. ● vs. exact sol. ○, $E/E = 1.0$, $\nu/\nu = 0.25$)