

ねじりを受ける薄板の第二混合境界値問題の解析

名工大(院) 中島将貴 J R 東海 三輪昌弘 日本車輛 村瀬義昭
 名工大 長谷部宣男 名工大 中村卓次

1. はじめに

薄板の曲げ問題で与えられる境界条件の種類には(1)外力境界のみが与えられる場合、(2)境界の一部で外力の2成分が与えられ、残りの部分で変位の2成分が与えられる場合<第一混合境界値問題>(3)境界の一部で外力の1成分と変位の1成分が与えられ、残りの部分で外力の2成分が与えられる場合<第二混合境界値問題>がある。(1)、(2)の場合は今までにも多く解かれている[1]。しかし、(3)の場合の解析は数学的に難しく解析的にあまり解かれていないようである[2]。ここでは、直線境界の一部で外力の1成分として法線方向の曲げモーメントと変位の1成分として接線方向のたわみ角をそれぞれ与え、一樣ねじりが作用する問題について、有理型写像関数をもちいた複素応力関数の一般解を得た[2]。これを用いた解析例として、直線境界の一部分が単純支持され、無限遠方で一樣ねじりモーメント T_0 が作用する半無限板の場合について、単純支持の一端からクラックが生じた場合の応力分布及び応力拡大係数を求める。

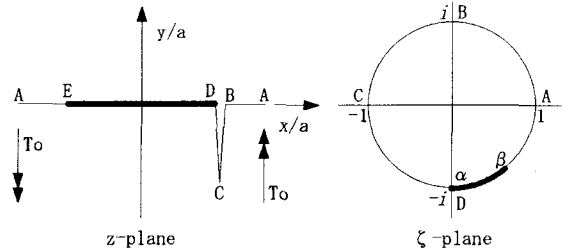


図-1 解析形状と写像面の単位円 (クラック発生後)

図-1に示す物理面を単位円内に写像する写像関数 $\omega(\zeta)$ は E_0 、 E_k 、 E_c 、 ζ_k を複素定数として次式で与えられる[1]。

$$\omega(\zeta) = \frac{E_0}{1-\zeta} + \sum_{k=1}^{24} \frac{E_k}{\zeta_k - \zeta} + E_c$$

$\omega(\zeta)$ を用いた複素応力関数 $\phi(\zeta)$ の一般解は次で表される。

$$\begin{aligned} \phi(\zeta) = & -\frac{iT_0}{4D} \omega(\zeta) + \frac{iT_0}{8D(3+\nu)} \sum_{k=1}^{24} \frac{E_k}{\zeta_k - \zeta} \left\{ 7 + \nu + (1-\nu) \frac{\chi(\zeta)}{\chi(\zeta_k)} \right\} + \frac{(\nu-1)iT_0}{8D(3+\nu)} \sum_{k=1}^{24} \frac{\bar{E}_k}{\zeta_k' - \zeta} \left\{ 1 - \frac{\chi(\zeta)}{\chi(\zeta_k')} \right\} \\ & + \frac{1}{2K} \sum_{k=1}^{24} \frac{\bar{A}_k B_k}{\zeta_k - \zeta} \left\{ 1 + \frac{\chi(\zeta)}{\chi(\zeta_k)} \right\} + \frac{1}{2K} \sum_{k=1}^{24} \frac{A_k \bar{B}_k}{\zeta_k' - \zeta} \left\{ 1 - \frac{\chi(\zeta)}{\chi(\zeta_k')} \right\} \end{aligned}$$

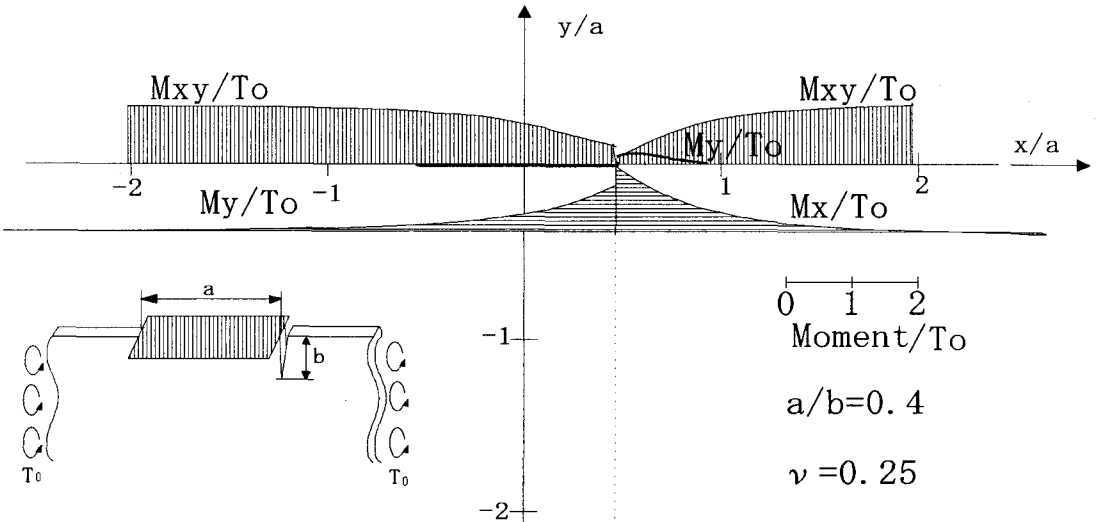


図-2 応力分布図 (クラック発生後)

ここに、 ν はPoisson比、 $\kappa=(3-\nu)/(1+\nu)$ 、 D は曲げ剛さである。 $\chi(\zeta)$ はPlemelj関数で、 $\chi(\zeta)=(\zeta-\alpha)^{0.5}(\zeta-\beta)^{0.5}$ と表される。また α 、 β は単位円上で単純支持の両端に対応し、応力の次元では $\chi(\zeta)$ は一階微分の形をとり、 α と β で-0.5乗のオーダーの特異性を示す。また $B_k \equiv E_k / \omega'(\zeta'_k)$ 、 $\zeta'_k \equiv 1/\zeta_k$ なる定数で、未定定数 A_k は $A_k = \phi'(\zeta'_k)$ なる関係から48次元の連立方程式を解いて決定される。

3. 応力分布

応力分布の例として、単純支持端から $b/a=0.4$ の長さのクラックが発生した場合を図-2に示す。クラック先端近傍の左側のクラック面では、先端に近づくにつれて M_y は負の小さな値から負の無限大に発散し、薄板内部からクラック近傍に近づくとき M_y は正の小さな値から正の無限大に発散している。

4. 応力拡大係数

応力拡大係数 k_B 、 k_S は $\phi(\zeta)$ 、 $\omega(\zeta)$ を用いて次式で与えられる [3]。

$$k_B - ik_S = -2D(1+\nu)e^{\frac{-i\delta}{2}} \frac{\phi'(\zeta_0)}{\sqrt{\omega''(\zeta_0)}}$$

ここに ζ_0 は単位円上のクラック先端の座標であり、 δ はクラックとX軸とのなす角である。ここでは、 $\zeta_0=-1$ 、 $\delta=-\pi/2$ である。

また、次式により無次元化した応力拡大係数を用いる。

$$F_{Ba} + iF_{Sa} = \frac{3+\nu}{1+\nu} \frac{k_B + ik_S}{T_0 \sqrt{a}} \quad ; 0 \leq b/a \leq 1$$

$$F_{Bb} + iF_{Sb} = \frac{3+\nu}{1+\nu} \frac{k_B + ik_S}{T_0 \sqrt{b}} \quad ; 0 \leq a/b \leq 1$$

得られた結果を表-1に示す。

5. 解析結果

表-1 無次元化された応力拡大係数

単純支持の長さが0に近づき($a/b \rightarrow 0$)その影響が小さくなるにつれて、 F_B 、 F_S は半平面に生じたクラックのそれに近づいていることが確認できる [4]。逆にクラックの長さが短くなる($b/a \rightarrow 0$)と応力拡大係数はともに0に近づいている。

このことは、クラックがない場合の写像関数 $\omega(\zeta)$ は $E_k=0$ ととして与えられ、このとき式(2)の $\phi(\zeta)$ は特異項を含まない形になる。つまり、クラックがない場合には応力集中が起きない。

		Fb			Fs		
		$\nu=0.0$	0.25	0.5	$\nu=0.0$	0.25	0.5
a/b	0.01	0.0000	0.0000	0.0000	-2.0216	-2.0102	-2.0039
	0.2	-0.0002	0.0000	0.0000	-2.0216	-2.0102	-2.0039
	0.4	-0.0016	-0.0004	-0.0005	-2.0217	-2.0103	-2.0039
	0.6	-0.0048	-0.0028	-0.0015	-2.0216	-2.0103	-2.0039
	0.8	-0.0091	-0.0055	-0.0030	-2.0211	-2.0100	-2.0038
b/a	1	-0.0138	-0.0084	-0.0047	-2.0202	-2.0096	-2.0037
	0.8	-0.0172	-0.0107	-0.0060	-1.8057	-1.7969	-1.7919
	0.6	-0.0205	-0.0130	-0.0074	-1.5622	-1.5554	-1.5516
	0.4	-0.0225	-0.0144	-0.0084	-1.2737	-1.2691	-1.2665
	0.2	-0.0203	-0.0133	-0.0078	-0.8993	-0.8968	-0.8953
	0.00001	-0.0002	-0.0001	0.0000	-0.0064	-0.0063	-0.0063

<参考文献>

- [1] Hasebe, J. Engrg. Mech.、110、ASCE、1984
- [2] Hasebe, Miwa & Nakamura, J. Engrg. Mech.、119、ASCE、1993
- [3] Hasebe, J. Engrg. Mech.、104、ASCE、1978
- [4] Hasebe, Ing. Arch.、49、1980