地盤における熱・水・応力連成問題の逆解析について

名古屋大学大学院 ○学生会員 呉 旭
名古屋大学大学院 学生会員 三輪田 義博
名古屋大学工学部 正会員 市川 康明

1．はじめに

水を含んでいる地盤に熱源があると、熱の移動・水の浸透・地盤の変形、これら三つの現象の間に相互作用があると考えられる。例えば、熱による間隙水圧の変化、浸透による熱の移動またそれらの変形への影響もある。こう言った連成挙動の解明が放射性廃棄物の地下処理をはじめ、多くの実際問題と深く関わっている。本文では、飽和地盤の連成挙動を混合体理論で記述しGalerkin有限要素法の順解析定式化を基に、現場で観測した時系列データが得られると想定し、拡張カルマンフィルタのアルコリズムを用いて、地盤の物性値または連成挙動をも逐次に最適推定できる可能性を示し、若干考察を行なう。

2．連成問題の逆解析の定式化

2.1 **状態式**　間隙率 n の飽和地盤において、水、応力、熱に対してそれぞれ質量保存則とDarcy則 、 運動量保存則と Hooke則、エネルギ保存則とFourier則を適用し、局所で成立する微分方程式は誘導でき、また、Galerkin有限要素法を用いて、既知境界条件の地盤領域で成立する空間離散化支配方程式が得られる[1)]。さらに、対象となる飽和地盤にいくつかの物性値が未知であり、時間には依存しないとすると、拡大されたシステムの状態式は（1）式で表される。

$$\dot{x}_t = -A^{-1}Bx_t + A^{-1}f = g(x_t) \tag{1}$$

ここに、

$$A = \begin{bmatrix} C_{UU} & C_{UH} & C_{UT} & 0 \\ C_{HU} & C_{HH} & C_{HT} & 0 \\ 0 & 0 & C_{TT} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{HH} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{TT} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad x_t = \begin{Bmatrix} U \\ H \\ T \\ p \end{Bmatrix},\quad f = \begin{Bmatrix} \dot{F} \\ Q \\ S \\ 0 \end{Bmatrix},\quad p = \begin{Bmatrix} E \\ \nu \\ \kappa \\ \lambda \end{Bmatrix}.$$

$\boldsymbol{U}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{T}$ はそれぞれ有限要素法の節点での変形、水位、温度、などの状態量ベクトルを表す。$\boldsymbol{p}$ は弾性係数E、ポアソン比ν、透水係数κ、熱伝導係数λ、などの未知パラメータで構成された未知パラメータベクトルである。$\boldsymbol{I}$ は未知パラメータの数と等しいランクを有する単位行列である。$\boldsymbol{C}, \boldsymbol{K}, \dot{\boldsymbol{F}}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{S}$ などは文献[1)]に参照されたい。また、ここでは、システムの誤差がないとしている。

2.2 **観測式**　現場でいくつかの地点の変形 U^*、水位 H^*、温度 T^* が観測されたとすると、拡張カルマンフィルタの観測式が（2）式で表される。

$$y_t = M_t x_t + v_t \tag{2}$$

$\boldsymbol{y}_t = \{U^* H^* T^*\}^t$， 観測ベクトルである； $\boldsymbol{M} = \mathrm{diag}\{S_U, S_H, S_T, 0\}$， 観測点の幾何位置を指定する対角列である ， S_U, S_H, S_T は 0また1のみで構成された対角行列である；$\boldsymbol{\nu}_t$ は観測誤差であり、その平均値 $E\{\boldsymbol{\nu}_t\} = 0$, 共分散行列 $E\{\boldsymbol{\nu}_t \boldsymbol{\nu}_s^T\} = \boldsymbol{R}\,\delta_{ts}$ ； $\boldsymbol{R}$ は対角行列である。

2.3 **拡張カルマンフィルタによる同定**　非線形連続型状態式（1）と線形離散化型観測式（2）に対して、拡張カルマンフィルタを適用し、初期の最適推定値 $\hat{X}$（$t_0|t_0$）と初期の推定誤差共分散行列 P（$t_0|t_0$）が与えられれば、観測された時系列データ y_t を取り入れながら、地盤の未知パラメータ及び連成挙動の状態量の最適推定値逐次に求めることができる。そのアルコリズムを以下のように示す[2),3)]。

step1
$$\hat{x}(t_{k+1}/t_k)=\hat{x}(t_k/t_k)+\int_{t_k}^{t_{k+1}}g(\hat{x}(t/t_k),t)dt \tag{3}$$
ここで、（3）式は、実際に順解析有限要素法に相当するものである。

$$P(t_{k+1}/t_k)=\Phi[t_{k+1},t_k;\hat{x}(t_k/t_k)]P(t_k/t_k)\Phi^T[t_{k+1},t_k;\hat{x}(t_k/t_k)] \tag{4}$$

ただし、
$$\begin{aligned}\Phi[t_{k+1},t_k;\hat{x}(t_k/t_k)]&=I+\Delta G=I+\Delta\frac{\partial g(x_t)}{\partial x_t}\\&=I+\Delta\left[A^{-1}\frac{\partial A}{\partial x}A^{-1}Bx-A^{-1}\frac{\partial B}{\partial x}x-A^{-1}B-A^{-1}\frac{\partial A}{\partial x}A^{-1}f\right]_{\hat{x}(t_k/t_k)}\end{aligned} \tag{5}$$

（Δ：時間間隔）

step2
$$K\{t_{k+1};\hat{x}(t_{k+1}/t_k)\}=P(t_{k+1}/t_k)M^T[MP(t_{k+1}/t_k)M^T+R(t_{k+1})]^{-1} \tag{6}$$

step3
$$\hat{x}(t_{k+1}/t_{k+1})=\hat{x}(t_{k+1}/t_k)+K[t_{k+1};\hat{x}(t_{k+1}/t_k)][y_{t_{k+1}}-M\hat{x}(t_{k+1}/t_k)] \tag{7}$$
ここで、y_{k+1} は 実際の観測データあるいわ数値計算の模擬データであると考えられる。

$$\begin{aligned}P(t_{k+1}/t_{k+1})&=[I-K[t_{k+1};\hat{x}(t_{k+1}/t_k)]M(t_{k+1})]P(t_{k+1}/t_k)[I-K[t_{k+1};\hat{x}(t_{k+1}/t_k)]M(t_{k+1})]^T\\&\quad+K[t_{k+1};\hat{x}(t_{k+1}/t_k)]R(t_{k+1})K^T[t_{k+1};\hat{x}(t_{k+1}/t_k)]\end{aligned} \tag{8}$$

3．考察

カルマンフィルタは本来線形確率システムの状態推定のアルコリズムとして発表されたものであるが、実際の応用では未知パラメータを含むシステムの推定、同定に用いられることが多い[4)]。ここで示した定式化も、その一例であり、地盤の物性値だけではなく地盤の連成挙動も逐次に推定することが可能である。

観測された時系列データから時変システムの未知パラメータまた状態量を同定するに当たっては、観測時間帯でのデータを一遍に処理する必要がなく、逐次に計算するので、計算が比較的に簡単に行なうことができる。

問題はアルコリズムの収束性にある。先験情報の与え方は非常に重要であるが、ここで、特に正則化の働きをすると見られる観測誤差の共分散行列 R の取り扱いに関しては今後の数値計算に注意深く払わなければならないと考えている。

参考文献：

1）高田渉太郎: 混合体理論による地盤内の熱,水,応力連成挙動に関する基礎研究，名古屋大学修士論文, 1992 .
2）星谷　勝、斉藤悦郎: データ解析と応用， 鹿島出版会， 1991 .
3）A.H.Jazwinski : Stochastic Processes and Filtering Theory, Academic Press , 1970 .
4）片山　徹：応用カルマンフィルタ，朝倉書店，1983 .