

平面ひずみ圧縮試験の分岐挙動に及ぼす 非共軸項の影響

金沢大学工学部
金沢大学工学部
金沢大学工学部

正会員○矢富盟祥
正会員 石田 啓
学 生 加藤泰寛

1. 緒論 円柱型粘土の供試体を軸方向に圧縮すると、軸応力の小さいうちは一様に変形するが、最大応力に近づくにつれ、供試体の寸法比によるが大体、図-1のような対称（バルジ型、上下逆対称バルジ型）、非対称、またはそれらの合成モードの変形などが現れる。最大応力近傍に達するとせん断ひずみの局所化が観察され、時には、網目状のすべり面群が生成され、ついには一つのすべり面が発達すると、耐荷力を失い破壊にいたる。速度場の解の一意性が破られるのは楕円型内で生じることが証明できるので、それ以上の軸応力を与えたとき、均一場の解が不安定となり、図-1のような安定分岐解へと移行すると考えられる。そこで、本研究では、平面ひずみ、非排水試験に限定し、有限変形 Cam-clay モデルによる分岐解析を行い、分岐荷重と変形モードを求め、また非共軸項が分岐挙動にいか

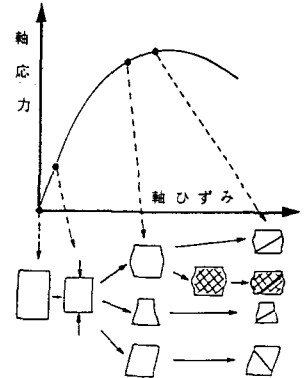


図-1 一軸圧縮供試体の分岐とせん断面

2. 平面ひずみ非排水試験の分岐解析 図-2のように軸荷重は変位制御で圧縮し、側方荷重は、水圧で与えるものとし、側圧一定試験を行うものとする。ここで、応力 T_{11} 等は引張を正、圧縮を負とするが、ギリシャ文字の有効応力 $\sigma'_i (i=1,2,3)$ 、間隙水圧 u は、土質力学の慣例に従い、圧縮を正とする。また、平面ひずみの場合、 $\sigma'_3 = \frac{\sigma'_1 + \sigma'_2}{2}$ を仮定する。このとき、平均有効圧 $p' = \frac{\sigma'_1 + \sigma'_2}{2}$ となる。また以後、応力差 $q = \sigma'_1 - \sigma'_2$ とする。分岐が生じる瞬間 $t = t$ までは、応力、間隙水圧は一樣であるとする。その時、 $t = t$ での全応力は、

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & T_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma'_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma'_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma'_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -u & 0 & 0 \\ 0 & -u & 0 \\ 0 & 0 & -u \end{bmatrix}$$

となる。

2.1 増分釣合式 準静的な場合で物体力が無い場合を考える。このとき、増分釣合式は、

$$\text{div} \dot{S}_t = 0 \quad (2)$$

となる。(ここに、公称応力速度 $\dot{S}_t = \dot{T} + T(\text{tr} D) - T L^T$) 式(1)を使うと、式(2)は、

$$\text{div} \dot{T}' - \text{grad} \dot{u} = 0 \quad (3)$$

となる。(ここに、有効応力 $T' = T + u1$) 平面問題では、 (x_1, x_2) 軸を考えると、次式のようになる。

$$\begin{aligned} \dot{T}'_{11,1} + \dot{T}'_{12,2} - \dot{u}_{,1} &= 0 \\ \dot{T}'_{21,1} + \dot{T}'_{22,2} - \dot{u}_{,2} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

2.2 境界条件 上下面では摩擦がなく、 v_1 が一定速度であり、側面では、側圧一定より、 $\dot{s}_t = \sigma_2 L^T n$ であるので、境界条件は次のようになる。(ここに、公称表面応力速度 $\dot{s}_t = \dot{S}_t n$)

$$\text{上下面 } (x_1 = \pm a_1) : v_1 = \mp v_{10}, \quad \dot{s}_2 = 0$$

$$\text{側面 } (x_2 = \pm a_2) : \dot{s}_1 = (\sigma'_2 + u)v_{2,1}, \quad \dot{s}_2 = (\sigma'_2 + u)v_{2,2}$$

ゆえに、増分境界値問題の解は次のように、均一境界条件と不均一境界条件の解の和となる。

$$\begin{aligned}
 \text{a) 均一境界条件} & : \text{上下面 } (x_1 = \pm a_1) : v_1 = \mp v_{10}, \quad \dot{T}'_{21} = 0 \\
 & \quad \text{側面 } (x_2 = \pm a_2) : \dot{T}'_{22} = \dot{u}, \quad \dot{T}'_{12} = 0 \\
 \text{b) 不均一境界条件} & : \text{上下面 } (x_1 = \pm a_1) : v_1 = 0, \quad \dot{T}'_{21} = 0 \\
 & \quad \text{側面 } (x_2 = \pm a_2) : \dot{T}'_{22} = 0, \quad \dot{T}'_{12} = -qv_{2,1}
 \end{aligned} \tag{5}$$

2.3 構成式 非排水平面ひずみ条件での均一場の Cam-clay モデルの構成式は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \dot{T}'_{11} - \dot{T}'_{22} &= 2\mu^*(D_{11} - D_{22}) \\
 \dot{T}'_{12} &= 2\mu D_{12} \\
 D_{11} + D_{22} &= 0, \quad D_{33} = 0
 \end{aligned} \tag{6}$$

ここに、Cam-clay モデルの場合の μ, μ^* の具体形は、参考文献(1) 参照。

2.4 速度ポテンシャルを用いた増分釣合式と境界条件

式(4)の増分釣合式と、式(5)の境界条件に、式(6)の構成式を代入し、 $v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}$ なる流れ関数 ψ を導入し、整理すると、増分釣合式と境界条件は次のようになる。

$$\text{増分釣合式} : \left(\mu - \frac{q}{2}\right)\psi_{,1111} + 2(2\mu^* - \mu)\psi_{,1122} + \left(\mu + \frac{q}{2}\right)\psi_{,2222} = 0 \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
 \text{境界条件} : \text{上下面 } (x_1 = \pm a_1) : \psi_{,2} &= 0, \quad \psi_{,11} = 0 \\
 \text{側面 } (x_2 = \pm a_2) : \psi_{,11} &= \psi_{,22} \quad \left(\mu + \frac{q}{2} = 0 \text{ 以外の時}\right) \\
 & \quad \left(\mu + \frac{q}{2}\right)\psi_{,222} = \left(\mu - \frac{q}{2} - 4\mu^*\right)\psi_{,112}
 \end{aligned} \tag{8}$$

結局、非排水側圧一定平面ひずみの固有値問題は、一軸引張、圧縮問題（参考文献(2),(3) 参照）と同様になる。

3. 解析結果と考察 式(7)、式(8)から固有方程式を求め、((2),

(3) 参照) Cam-clay モデルの場合の μ, μ^* を代入すると、固有方程式は、

$\frac{q}{p}$ (分岐荷重), $\frac{a_2}{a_1}$ (供試体寸法比), m (変形モード), A (非共軸項) の

関数で与えられる。図-3, 4は、変形モードと非共軸項を与えたときの $\frac{q}{p}$

と $\frac{a_2}{a_1}$ の関係を表す。まず、分岐挙動における非共軸項の影響を考察するため

に、非共軸項 $A = 0$ 及び $A = 0.01$ のときの非対称型変形1次モードの $\frac{q}{p}$

と $\frac{a_2}{a_1}$ の関係を図-3に示す。図-3より、 $A = 0$ の時よりも、 $A = 0.01$ の

時の方が、同じ供試体寸法比では、非対称型変形1次モードは分岐荷重が小

さいときに発生することが言える。このことは、対称型であっても、変形モ

ードを変えても、同じことが言える。また、変形モードに関しては、一般に、

高次変形モードは、低次変形モードと較べて、分岐荷重が大きいのが通常で

あるが、本解析結果では、寸法比 $\left(\frac{a_2}{a_1} \approx 1\right)$ の場合、図-4より、対称型

10次変形モードでも、対称型1, 2次変形モード、非対称型1次変形モー

ドとほとんど変わらない分岐荷重で発生することが言える。この結果から、

供試体寸法比によっては、緒論で述べたような、分岐モード、また高次分岐

モードのせん断ひずみ増分の局所化の結果として考えられる網目状のすべり

面群の発生も、ほぼ同一な分岐荷重で発生することが考えられる。いったん

網目状のすべり面群が発生しても、途中で他のモードに分岐し、すべり面群

が見えなくなることも考えられる。

参考文献

- (1) C.Yatomi et. al., *Soilds and Foundations*, vol.29, 1989.
- (2) R.Hill and W.Hutchinson, *Mecch.Phys.Solids*, vol.23, 1975.
- (3) N.J.B.Young, *Mech.Phys.Solids*, vol.24, 1976.

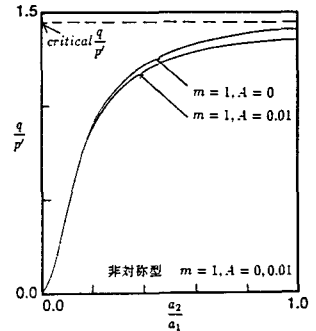


図-3 分岐荷重に及ぼす非共軸項の影響

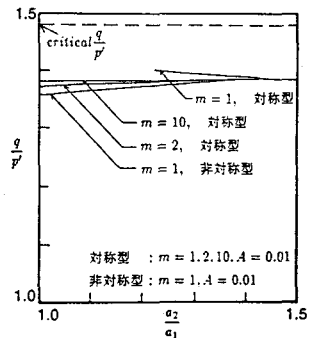


図-4 分岐荷重と寸法比の関係