

土中の水-空気系の挙動の解析法に関する一考察

(毛細管モデルと基礎式の整理)

岐阜大学工学部 正会員 宇野尚雄 杉井俊夫
岐阜大学大学院 学生会員 ○ 神谷浩二

1. 透気性と透水性 多孔質媒体中の流体の流れに関する運動の式としてのダルシー則は、 x 軸方向（水平方向）の一次元流れに関して、Muskatによれば、流体の密度に関係なく次式で与えられている¹⁾。

$$v_x = -\frac{k}{\eta} \frac{dp}{dx} \quad (1)$$

ここに、 η : 流体の粘性係数($\text{g}/(\text{cm} \cdot \text{s})$), k : 固有透過度(cm^2), p : 流体の圧力(gf/cm^2)。

式(1)を水と空気について、次のように書き改める。

$$v_w = -\frac{k}{\eta_w} \frac{dp_w}{dx} = -k \frac{\rho_w g}{\eta_w} \frac{\partial h_w}{\partial x} = -k_w \frac{\partial h_w}{\partial x} \quad (2)$$

$$v_a = -\frac{k}{\eta_a} \frac{dp_a}{dx} = -k \frac{\rho_w g}{\eta_a} \frac{\partial h_a}{\partial x} = -k_a \frac{\partial h_a}{\partial x} \quad (3)$$

ここに、 v_w, v_a : 水、空気の x 方向流速(cm/s),
 ρ : 流体密度(g/cm^3), g : 重力加速度(cm/s^2),
 h : 圧力水頭(cm) (記号の添字 w, a は、水、空気を表す)。

k_w は透水係数(cm/s)であり、透気係数 k_a (cm/s)などを次式のように定義する。

$$k_w = \frac{\rho_w g}{\eta_w} k \quad (4), \quad k_a = \frac{\rho_w g}{\eta_a} k \quad (5)$$

$$p_w = \rho_w g h_w \quad (6), \quad p_a = \rho_w g h_a \quad (7)$$

式(3), (5), (7)では ρ_a でなく、 ρ_w を使用している理由は、式(7)に使用した「空気の圧力水頭」 h_a が「水頭の高さ」として表現すれば、「間隙水の水頭」 h_w と h_a が同じ「水頭(cm)」の尺度で表現できる利点があるからである。式(1)または式(4)と式(5)から、

$$\frac{k_a}{k_w} = \frac{\eta_w}{\eta_a} \quad (8)$$

温度 15°C のとき、 $\eta_w/\eta_a = 0.0114/0.000179$ (いずれも単位は $\text{g}/(\text{cm} \cdot \text{s})$) = $63.7 \approx 64$ となる。この値は温度により変化し、 0°C の104.8から 30°C の42.8まで変化する。即ち、透気係数は透水係数より2桁ほど大きい。

さて、一本の管路内の水の流れを決めるHagen-Poiseuilleの式は、「土の間隙をCapillary tubeとみなす」毛細管モデルの仮定のもとで、式(1)から、

$$v_x = -k \frac{\rho_w g}{\eta_w} \frac{dh_w}{dx}, \quad k = \frac{n R^2}{32} \quad (9)$$

R : tubeの直径(cm)。

一方、管内水流の径深(hydraulic radius) d (cm)は、 $d = R/4$ で与えられ、体積基準の比表面積 S_v (cm^2/cm^3)と質量基準の比表面積 S_w (cm^2/g)は、

$$S_v = \frac{A_s}{U_s} \quad (10), \quad S_w = \frac{A_s}{M_s} \quad (11)$$

A_s, U_s : ある土粒子部分の表面積、体積、

M_s : 土粒子体積 U_s のときの質量。

と定義する。 $M_s = \rho_s U_s$ (ρ_s : 土粒子密度(g/cm^3))であるから、 $S_v = S_w \rho_s$ 。

管の径深 d は、 S_v を使って表すと、

$$d = \frac{\text{管内体積}}{\text{管断面面積}} = \frac{U_s e}{A_s} = \frac{e}{S_v} = \frac{n}{S_v(1-n)} = \frac{R}{4} \quad (12)$$

式(12)を式(9)に代入し、さらに分母に現れる数字2に代わって、先述の仮定の影響を実験的に調べたCarman (1937)は5が良いとして、

$$v_x = -k \frac{\rho_w g}{\eta_w} \frac{dh_w}{dx}, \quad k = \frac{n^3}{5 S_v^2 (1-n)^2} \quad (13)$$

を与えた。これが、Kozeny-Carman 式である²⁾。

2. 水-空気系の挙動の基礎式 地盤の鉛直2次元場を考えてみよう。間隙水については、連続式は式(14)、運動式は式(15)で与えられる。

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (14)$$

$$v_x = -k_x \frac{\partial h_w}{\partial x}, \quad v_z = -k_z \left(\frac{\partial h_w}{\partial z} + 1 \right) \quad (15)$$

ここに、 θ : 体積含水率、 k_w : 不飽和透水係数、

v_x, v_z : x, z 方向流速。

式(14)と式(15)から、

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_w \frac{\partial h_w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left[k_w \left(\frac{\partial h_w}{\partial z} + 1 \right) \right] \quad (16)$$

間隙空気については、連続式は式(17)、運動式は式(18)で与えられる。

$$\frac{\partial [\rho_a (n - \theta)]}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_a u_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho_a u_z)}{\partial z} = 0 \quad (17)$$

$$u_x = -\frac{k}{\eta_a} \frac{\partial p_a}{\partial x} = -k_a \frac{\partial h_a}{\partial x} \quad (18a)$$

$$u_z = -k_a \left(\frac{\partial h_a}{\partial z} + \frac{\rho_a}{\rho_w} \right) \quad (18b)$$

ここに, $p_a = \rho_w g h_a$, $k_a = k \rho_w g / \eta_a$,

u_x, u_z : 空気 の x, z 方向流速.

空気は圧縮性が無視できないため, 状態方程式として式(19)が与えられる.

$$\frac{p_a}{p_0} = \left(\frac{\rho_a}{\rho_0} \right)^m \quad (19)$$

ここに, 添字 0 は代表的状態 (例, 大気圧状態) の

もの, m : 指数で, 等温変化のとき $m = 1$,

断熱変化のとき $m = 1.4$ (空気).

等方変化のとき, 式(17)~式(19)から, $\rho_a / \rho_w = \rho_0 g / p_0 \equiv \varepsilon$ として,

$$\frac{\partial}{\partial t} [h_a(n-\theta)] = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_a h_a \frac{\partial h_a}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left[k_a h_a \left(\frac{\partial h_a}{\partial z} + \varepsilon h_a \right) \right] \quad (20)$$

式(16)の間隙水と, 式(20)の間隙空気の基本式を連立して解くには, 条件式が 1 ヶ不足する. これを補うのが水-空気の界面条件である. 通常, 発生サクション $S^*[L]$ は次式で定義されている.

$$S^* = h_a - h_w \quad (21)$$

一方, 平衡状態におけるサクション S は不飽和状態の θ との間に土固有の水分保持特性の関係として次式があり, van-Genuchtenの式が良好とされている³⁾.

$$\theta = f(S) \quad (22)$$

一般に $S^* \neq S$ であり, 式(22)は浸透過程と排水過程で異なるヒステリシス曲線を描くが, また現象の途中で過程が変化すると走査曲線(Scanning curve)上を移動する関係となる. これらを一括して式(22)で表現したとすると, 非定常現象では $|S^* - S|$ が変化要因となる. したがって, 「初期条件としての θ に対して, 変化要因に応じて微小時間後の h_a, h_w を独立にそれぞれ式(16), (20)で計算してやる. その後, 平衡状態に達すると,

$$S^* = S \quad (23)$$

を満足させるように解析する」方針でよいと考えられる. しかしながら, この解析方法は間隙水と間隙空気の状態が連続的に変化する現象を表現し得るが, 気泡が不連続に, 間欠的に運動する現象を表現することは困難である. しかも, これまでの地盤中に圧入した空気の挙動観察によれば, 間隙空気は不確実に透気しや

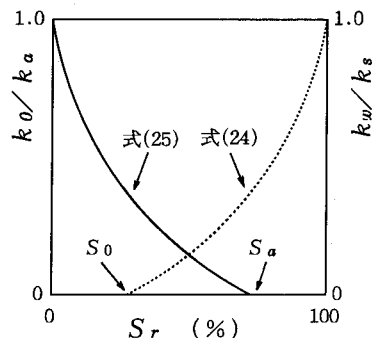


図-1 透水性・透気性と飽和度の関係

すい部分を変えながら通気の道(みち)を形成する傾向が認められている. このような飽和地盤中の挙動は空気塊が離散・集合するプロセスとして解析する必要がある.

先述の式(16), (20)における k_w, k_a はともに飽和度の関数である(図-1)^{3), 4)}.

$$\frac{k_w}{k_s} = \begin{cases} F_1(S_r) & (S_r \geq S_0) \\ 0 & (S_0 > S_r \geq 0) \end{cases} \quad (24)$$

$$\frac{k_a}{k_0} = \begin{cases} 0 & (S_r \geq S_a) \\ F_2(S_r) & (S_a > S_r \geq 0) \end{cases} \quad (25)$$

ここに, k_s : 飽和透水係数, k_0 : 乾燥土の透気係数, S_0, S_a : 水, 空気のそれぞれが透過性を失う飽和度の境界値.

前述の「空気塊の挙動」は $S_r > S_a$ における現象である. また, $S_r < S_0$ では空気の移動が主になって, 間隙水は蒸気移動に変化する微かな現象となる. 結果的に, 式(16)や式(20)で解析できる「水-空気系」挙動は $0 \leq S_r \leq S_a$ の範囲であることがわかる.

〔参考文献〕

- 1) Muskat, M.: The Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media, McGraw-Hill Book Co., pp. 69-74, 1937.
- 2) Carman, P. C.: Fluid Flow Through Granular Beds, Trans. Inst. Chem. Eng. (London), Vol. 15, pp. 150-166, 1937.
- 3) van-Genuchten, M. Th.: A Closed-form Equation for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Soils, Soil Sci. Soc. Am. J., Vol. 44, pp. 892-898, 1980.
- 4) 宇野・杉井・柘植: 土中の間隙水と間隙空気の流動について, 混相流シンポジウム'91(第10回)講演論文集, pp. 147-150, 1991.