2次元非定常流中の物体に及ぼす流体力の理論的考察

金沢大学　正会員　○斎藤武久・矢富盟祥・石田　啓

1. はじめに

2次元非定常完全流中の物体におよぼす流体力を求める理論公式は，種々の著名な書に記されているが[1)]，そのほとんどが複素関数論を使用して求められており，また，流体中に渦度が非定常に分布している場合の流体力を渦度分布で一般的に表した公式は著者らの知る限り報告されていない．

複素関数を用いると，解析性の便利さはあるが，途中の式展開，また流体力を求める公式自身も，その物理的意味がつかみにくい欠点がある．3次元への拡張も複素関数を用いる限り不可能である．そこで本報告では，とりあえず，2次元に限定するが，複素関数を用いず，流体力を渦度分布で表現した一般公式を導く．

2. 物体におよぼす流体力

非圧縮性完全流体からなる非定常主流中に，1つの変形物体が連結閉領域 B_tを占めているものとし，その近傍 E_tには，非定常回転渦（渦度）$\boldsymbol{W}$（スピン）が離散的（渦点分布），曲線的（渦膜）または連続的に発生，分布しているとする.（図–1参照）なお，本考察では，物体境界∂B_t自身も，流体の有限個の渦または，その連続分布によって，例えば，物体が固定されている時は法線速度ゼロ等の条件を付加することによる仮想的な物体境界∂B_tを考える．したがって，∂B_t自身も流体の一部として考えることができる．この時，E_tを含む流体と共に動いている閉領域 S_tを考え，その境界を∂S_tとする．その時，運動量保存則より，物体 B_tが流体から受ける力$\boldsymbol{F}_t$を

$$\boldsymbol{F}_t \stackrel{\text{def}}{=} \oint_{\partial B_t} \boldsymbol{t} ds = \oint_{\partial S_t} \boldsymbol{t} ds - \frac{d}{dt}\int_{S_t} \rho \boldsymbol{v} da \cdots\cdots (1)$$

と定義する.（ρは密度であり，一定とする.）本報告では，紙面の都合上，角運動量保存則の結果であるモーメント力に関しては言及しない．

ここで，完全流体の場合，表面力ベクトル$\boldsymbol{t}$は，$\boldsymbol{t} = -P\boldsymbol{n}$（P:水圧，$\boldsymbol{n}$:単位法線ベクトル）であり，式(1)で$\partial S_t$が物質境界（Material surface）であるから，

$$\boldsymbol{F} = \oint_{\partial S_t} (-P\boldsymbol{n} - \rho \boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}))ds - \int_{S_t} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \boldsymbol{v}) da \cdots\cdots (2)$$

となる．ここで，∂S_tを流体運動とは無関係な固定した領域 S，すなわち，∂S_tを Control surface ∂Sに置き換えることができて，その場合，式(2)は，

$$\boldsymbol{F} = \oint_{\partial S} (-P\boldsymbol{n} - \rho \boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}))ds - \frac{d}{dt}\int_{S} (\rho \boldsymbol{v}) da \cdots\cdots (3)$$

となる.（もちろん，はじめから Control surface ∂Sを使っても良かったのだが，Material surface ∂S_tを使った方が物質の移動に伴う運動量の保存則を考える場合，物理的に分かりやすい面もあるので，あえて，はじめに，∂S_tを使用した.）

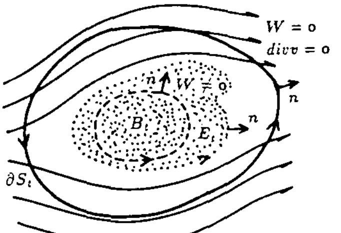
以後，紙面の都合上，詳細な証明は省略するが，いくつかの重要な補題を記す．直交デカルト座標(x_1,x_2)を考えて，$\boldsymbol{x} = (x_1,x_2)$, $\boldsymbol{x}^{\perp} = (x_2,-x_1)$ とおくと

（補題1）もし，$div\boldsymbol{v} = 0$ ならば

$$\oint_{\partial S}(\frac{v^2}{2}\boldsymbol{n}ds - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})ds) = -\int_S 2\boldsymbol{W}\dot{\boldsymbol{x}}da$$

ここで，$v^2 = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}$とおいた．

（補題2）渦無し場（$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{O}$）では，速度ポテンシャル ϕ（$\boldsymbol{v} = grad\phi$）が存在し，その時



図–1 領域の概略図

$$\oint_{\partial S} \frac{\partial \phi}{\partial t} \boldsymbol{n} ds = -\frac{d}{dt} \oint_{\partial S} \boldsymbol{x}^{\perp} (\boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{x})$$

が成り立つ．ここで，$d\phi = \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{x}$である．

（補題３）

$$\int_S \boldsymbol{v} da = -\oint_{\partial S} \boldsymbol{x}^{\perp} (\boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{x}) - \oint_S 2W \boldsymbol{x} da$$

∂S近傍は，渦無し流れであるから，ベルヌーイの定理$-p = \frac{\rho}{2} v^2 + \rho f(t) + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$, ($f(t)$:任意関数) が成り立ち，式 (3) の右辺第１積分項は

$$\oint_{\partial S} \{ (\frac{\rho}{2} v^2 + \rho f(t) + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}) \boldsymbol{n} - \rho \boldsymbol{v} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) \} ds \quad \cdots\cdots (4)$$

となる．$\oint_{\partial S} \boldsymbol{n} ds = 0$ であるから,（補題１）,（補題２）を使うと，式 (4) は

$$-2\rho \int_S W \dot{\boldsymbol{x}} da - \frac{d}{dt} \oint_{\partial S} \rho \boldsymbol{x}^{\perp} (\boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{x}). \quad \cdots\cdots (5)$$

一方，式 (3) の右辺第２積分項は,（補題３）を使って

$$-\frac{d}{dt} \int_S \rho \boldsymbol{v} da = \frac{d}{dt} \oint_{\partial S} \rho \boldsymbol{x}^{\perp} (\boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{x}) + \rho \frac{d}{dt} \int_S 2W \dot{\boldsymbol{x}} da \quad \cdots\cdots (6)$$

となる．結局，流体力，式 (3) は式 (5)，(6) より

$$\boldsymbol{F}_t = \rho \frac{d}{dt} \int_S 2W \boldsymbol{x} da - \rho \int_S 2W \dot{\boldsymbol{x}} da \quad \cdots\cdots (7)$$

となる．上式より，非定常渦度Wの存在が流体力の一部となることに注意．

3. 離散渦点法の波力に関して

物体 B_tが，時間的に固定されているとし，その境界∂B_tおよび剥離渦を多数の渦糸で置き換え，これらの渦糸による流速と，物体が存在しない場合の流速場を重ね合わせる，いわゆる，離散渦点法[2)]による場合の波力式を考える．

今，簡単のため$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$ にある１個の渦糸を考え，点$\boldsymbol{x}_0$を含む微小領域 Cおよびその境界∂Cを考えると，ストークスの定理より

$$\Gamma(\boldsymbol{x}_0, t) = -\oint_{\partial C} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{x} = \int_C 2W_{12}(\boldsymbol{x}, t) \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) da = 2W_{12}(\boldsymbol{x}_0, t) = -2W_{21}(\boldsymbol{x}_0, t)$$

なる関係にあることがわかる．ここで循環Γは時計まわりを正とした．したがって，物体境界および剥離渦をＮ個の点$\boldsymbol{x}_j (j = 1, 2, \ldots, N)$ での渦糸$\Gamma(\boldsymbol{x}_j, t)$ に置き換えた場合，式 (7) より流体力は

$$\boldsymbol{F} = \rho \frac{d}{dt} \{ \sum_{j=1}^{N} \int_S 2\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}, t) \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_j) \boldsymbol{x} da \} - \rho \sum_{j=1}^{N} \int_S 2\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}, t) \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_j) \dot{\boldsymbol{x}} da$$

となる．上式を各成分に分けると

$$F_1 = \rho \frac{d}{dt} (\sum_{j=1}^{N} \Gamma(\boldsymbol{x}_j, t) y_j) - \rho \sum_{j=1}^{N} \Gamma(\boldsymbol{x}_j, t) \dot{y}_j \qquad F_2 = -\rho \frac{d}{dt} (\sum_{j=1}^{N} \Gamma(\boldsymbol{x}_j, t) x_j) + \rho \sum_{j=1}^{N} \Gamma(\boldsymbol{x}_j, t) \dot{x}_j$$

となり，文献 2) の場合と同じ結果となることがわかる．ここで，点$\boldsymbol{x}$の第１成分を x，第２成分を yとおいた．

〈注意〉∂B_tが本報告のように，渦糸で置き換えたような仮想的なものでない場合は,（補題３）より式 (6) を得る時，Sを $S \backslash B$に置き換え，式 (6) の右辺に$-\frac{d}{dt} \oint_{\partial B} \rho \boldsymbol{x}^{\perp} (\boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{x})$ の項を追加する必要があり，(7) の流体力は

$$\boldsymbol{F}_t = -\frac{d}{dt} \oint_{\partial B} \rho \boldsymbol{x}^{\perp} (\boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{x}) + \rho \frac{d}{dt} \int_{S \backslash B} 2W \boldsymbol{x} da - \rho \int_{S \backslash B} 2W \dot{\boldsymbol{x}} da$$

となる．ただし，∂Bは，流体から，物体への極限としての境界である．

参考文献

1) 例えば　今井　功:流体力学（前編），裳華房
2) 例えば　石田　啓・北山　真:波による正四角柱の後流渦および波力に関する研究，土木学会論文集，No.456/II − 21,pp.55-64, 1992.